Analysis II

Ideen für Prüfungsabläufe

4. August 2018

1 Ein ungefährer beispielhafter Prüfungsablauf

- „Wir hatten ja Extremwertprobleme. Was war ein Extremwert?“
- „Die Definition ist ja noch nicht so vielsagend. Wie können wir denn so welche ausrechnen?“
- “Warum gilt das denn?“
  - Satz über Extremwerte über Ableitungen beweisen.
  - Zweiter Teil des Satzes benötigt **Taylor**.
- “Was ist denn der Satz von Taylor, wo wir ihn schon benutzen?“
  - Satz von Taylor mit allen Voraussetzungen und Folgerung darstellen.
- „Warum gilt der?“
  - Satz von Taylor beweisen über **MWS DIFF**.
- “Warum gilt der MWS DIFF?“ *usw.*
- „So. Jetzt hatten wir das nicht nur eindimensional, sondern wir hatten ja auch mehrdimensionale Ableitungen. Gab es da auch Extremwertprobleme?“
  - **Ja**, mit und ohne Nebenbedingungen.
  - *bisschen erzählen können...*
  - $\longrightarrow$ Lagrange-Multiplikator.
- „Warum gilt das?“
  - **Satz der impliziten Funktion**.
- „Was ist der, warum gilt der?“
  - Alle Voraussetzungen und Folgerung des Satzes darstellen.
  - Folgt aus **Umkehrsatz**.
- „Was ist denn der?“
  - Alle Voraussetzungen und Folgerung, wie immer.
  - Beweist man mit **Banach’schem Fixpunktsatz**.

Auf diese Weise dann durch mehrere Themenbereiche hindurch. Ein Satz, der das Thema startet, und dann ein Durcharbeiten einer Kette von Beweisideen, die zu anderen Sätzen führen.

- „Was ist denn ein Gradientenfeld, und was gilt da so?“
  - Definition nennen.
  - Äquivalenzen bzgl. Gradientenfeld und Wegintegralen nennen.
  - „Es gibt Integrabilitätsbedingungen.“
- „Was sind denn die Integrabilitätsbedingungen?“
  - In $\mathbb{R}^3$: $\operatorname{rot}(f) = 0$

- In $\mathbb{R}^n$: $\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}$

- „Warum gilt denn die allgemeine, wie beweist man das?“
  - Satz von Schwarz, da $F = \nabla V$ als Gradientenfeld ja eine Ableitung ist, ist $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ eine zweite (gemischte) partielle Ableitung.
- Gegenbeispiel, dass dies nur notwendig und nicht hinreichend ist?
  - $f(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$
  - Warum dieses Beispiel? Int.-bed. gilt, aber Stammfunktion lässt sich nicht eindeutig zusammensetzen.
- „Wann gilt das denn, dass das hinreichend ist?“
  - Sternförmiges Gebiet.
- „Und wo wir jetzt ein Gradientenfeld haben, wie **berechnet** man denn jetzt auf gute Weise ein Wegintegral?
  - Durch Anfangs- und Endpunkt der Kurve.

2 Ein anderer Prüfungsablauf

- „Wir hatten ja Ableitungen im Mehrdimensionalen. Was gab es denn da für verschiedene?“
  - „Partielle und totale Ableitung.“
- „Wie waren denn partielle und totale Ableitungen definiert?“
  - Voraussetzungen und Definitionen über Grenzwerte hinschreiben.
- „Wie hängen die beiden denn zusammen?“
  1. Aus total diffbar folgt partiell diffbar.
  2. Andersrum geht i.A. nicht.
- „Warum?“
  1. Die Definition von total diffbar ist stärker, sie enthält natürlich auch $h \in \mathbb{R}^n$ so, dass $h = \tilde{h}e^{(j)}$ für $\tilde{h} \in \mathbb{R}$.
  2. Gegenbeispiel angeben.
- „Da gab es noch einen dritten Typ, die Richtungsableitung. Wie war die definiert?“
- „Wie berechnet man die denn sinnvoll? Man will ja nicht immer Differentialquotienten angucken.“
  - $\frac{\partial f}{\partial v}\left(x^{(0)}\right) = \operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right) \cdot v$ (Skalarprodukt)
- „Warum gilt das?“
  - Mit Kettenregel beweisen.
- „Wie sieht das denn bei partiellen, totalen Ableitungen mit Stetigkeit aus?“
  - Zusammenhänge erklären.
  - Gegenbeispiele angeben für nicht-Folgerungen.
- „Stetigkeit hat ja was zu tun mit Vertauschen von Grenzwerten. Wir hatten da ja den Satz über gliedweise Differentiation. Einmal die Variante mit den Potenzreihen, und einmal die allgemeine. Schreiben Sie mal die allgemeine hin.“
  - Wichtig zu beachten: Voraussetzung ist gleichmäßige Konvergenz der **Ableitungen**! Wird oft falsch gemacht.
- „Warum gilt das?“

  - Beweisidee mit **Satz über gliedweise Integration** und **HSDI**.

- „Der Hauptsatz. Wie lautet der denn?“
- „Jetzt hatten wir ja auch mehrdimensionale Integrale. Wie sieht das denn da aus?“
  - Kurz eingehen auf verschiedene mehrdimensionale Integrale.
- „Haben wir da auch sowas wie den Hauptsatz?“
  - Ja, wenn wir **Gradientenfelder** haben.
  - Kurz auf Gradientenfelder eingehen, was diese sind.
- „Ja, was gilt mit Gradientenfeldern $F = \nabla V$ denn in dem Bezug?“
  - Die vier Äquivalenzen hinschreiben (Wegintegral wegunabhängig, hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab, $\int_\varphi F \cdot \mathrm{d}x = V\left(\varphi(b)\right) - V\left(\varphi(a)\right)$, $\oint F \cdot \mathrm{d}x = 0$)
- „So, manche davon erklären sich ja von selbst, aber warum ist das denn alles so, wenn man Gradientenfelder hat?„
  - Die Äquivalenzen in allen Richtungen beweisen.
- „Wenn wir wüssten, dass wir ein Gradientenfeld hätten, wie würden wir denn die Stammfunktion finden?“ … „Wenn Sie Physiker wären, wüssten Sie das!“
- „Gab es da etwas, wodurch wir bestimmen konnten, wann etwas ein Gradientenfeld ist?“
  - Integrabilitätsbedingung in $\mathbb{R}^3$: $\operatorname{rot} f = 0$
  - Integrabilitätsbedingung in $\mathbb{R}^n$: $\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}$
- „Warum gilt das?“
  - Satz von Schwarz.
- „Wie war denn der Satz von Schwarz, welche Voraussetzungen hatte der?“
- „Ist die Integrabilitätsbedingung denn eine hinreichende oder notwendige Bedingung?“
  - Nur notwendig, also es folgt nur, wenn wir schon ein Gradientenfeld haben, aber es gibt auch Funktionen, die die erfüllen, und kein Gradientenfeld sind.
  - Gegenbeispiel angeben.
- „Können wir das denn irgendwie retten?“
  - Ja, wenn wir ein sternförmiges Gebiet haben.
- „Sternförmiges *Gebiet*? Gibt es da was auffälliges zu zu sagen?“
  - Jede sternförmige Menge ist zusammenhängend! Denn man kann ja von jedem Punkt aus den Sternpunkt erreichen, und von da aus wieder jeden anderen Punkt.