

Analysis I

Alexander Köster, *Student der Universität Siegen*

22. Februar 2018

Eine Sammlung des zusammengefassten Vorlesungs- und Übungsstoffes einiger Themen der Analysis.

Eine Zusammenfassung der Veranstaltungen der Analysis 1 im Wintersemester 2017/18 der Universität Siegen.

Diese Zusammenfassung ersetzt keine Klausurvorbereitung. Sie wurde unabhängig von der Universität erstellt und beinhaltet nur die wichtigsten Sätze und Algorithmen.

Alles aus der Vorlesung, dem zugehörigen Skript und den zugehörigen Übungen, was nicht in dieser Zusammenfassung enthalten ist, ist dennoch wichtig für das Verständnis oder den Beweis der gegebenen Sätze.

Die Nummerierung in dieser Zusammenfassung entspricht **nicht** der Nummerierung in einer Vorlesung. Sie sollte nicht zum Lernen verwendet werden, nur zur chronologischen Orientierung.

Die Namen wichtiger Sätze zu lernen ist sinnvoller!

Inhaltsverzeichnis

1	Reelle Zahlen	2
1.1	Mengen, Aussagen, Abbildungen	2
1.2	Die reellen Zahlen	5
1.3	Natürliche, ganze, rationale Zahlen	7
1.4	Die reellen Zahlen II	9
1.5	Komplexe Zahlen	10
2	Folgen und Reihen	11
2.1	Folgen	11
2.2	Reihen	14
2.3	Häufungswerte von Folgen	18
3	Räume	19
3.1	Metrische Räume	19
3.2	Normierte Räume	23
4	Funktionen	24
4.1	Stetigkeit	24
4.2	Eigenschaften der Grenzwerte und Stetigkeit	26
4.3	Folgen und Reihen von (stetigen) Funktionen	27
4.4	Potenzreihen	28
5	Eindimensionale Differentialrechnung	31
5.1	Ableitungen	31

1 Reelle Zahlen

1.1 Mengen, Aussagen, Abbildungen

Definition 1.1.1: AUSSAGEN, PRÄDIKATE, QUANTOREN

Seien A, B Aussagen, die entweder wahr (w) oder falsch (f) sind.

- A und B : $A \wedge B$ A oder B : $A \vee B$
- entweder A oder B nicht A : $\neg A$
- Aus A folgt B : $A \Rightarrow B$ A genau dann, wenn B : $A \Leftrightarrow B$

Quantoren:

- „Es existiert (mindestens) ein x , sodass A bzgl. x gilt“: $\exists x : A(x)$
- „Es existiert genau ein x , sodass A bzgl. x gilt“: $\exists! x : A(x)$
- „Für alle x gilt A bzgl. x “: $\forall x : A(x)$
- „Für kein x gilt A bzgl. x “: $\nexists x : A(x) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$
- „Es existiert kein x , sodass A bzgl. x gilt“: $\nexists x : A(x) \Leftrightarrow \forall x : \neg A(x)$

Bemerkung 1.1.2: „RECHENREGEL“ FÜR AUSSAGEN

Seien A, B, C beliebige Aussagen.

DeMorgan'sche Gesetze:

- $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$
- $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$

Distributivgesetze:

- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Diese „Rechenregeln“ können mit Wahrheitstabellen bewiesen werden.

Definition 1.1.3: MENGENOPERATIONEN

Seien A, B beliebige Mengen.

- **Vereinigung (union)**: $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- **Schnittmenge (intersection)**: $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- **Mengendifferenz („A ohne B“)**: $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- **Mengengleichheit**: $A = B : \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$
- **Teilmenge (subset)**: $A \subseteq B : \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$
- **Echte Teilmenge (proper subset)**: $A \subsetneq B : \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

Die Symbole für Teilmenge und echte Teilmenge werden auch manchmal *beide* mit $A \subset B$ bezeichnet. Welches gemeint ist, muss aus dem Zusammenhang oder vorherigen Definitionen klar sein.

Ich verwende $A \subset B$ als *echte* Teilmenge, aber werde in diesem Dokument die jeweiligen eindeutigen Symbole verwenden wie hier angegeben, zur Klarheit.

Satz 1.1.4: TRIVIALE EIGENSCHAFTEN VON MENGENOPERATIONEN

Seien A, B, C beliebige Mengen.

- $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$
- $A \subseteq A \cup B$ und $B \subseteq A \cup B$
- $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Definition 1.1.5: MENGENSYSTEME

Mengen von Mengen nennt man **Mengensysteme**.

Sei \mathcal{M} ein Mengensystem.

- $\bigcup \mathcal{M} := \{x \mid \exists M \in \mathcal{M} : x \in M\}$
- $\bigcap \mathcal{M} := \{x \mid \forall M \in \mathcal{M} : x \in M\}$

Diese Definition ist begründet durch das **Russell'sche Paradoxon**: Betrachte die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthält. Diese Definition ist ein Widerspruch: $R := \{x \mid x \notin x\} \Rightarrow R \in R \Leftrightarrow R \notin R \nabla$

Definition 1.1.6: LEERE MENGE

Die **leere Menge** wird mit $\emptyset := \{\}$ bezeichnet.

Definition 1.1.7: POTENZMENGE

Sei M eine beliebige Menge. Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(M) := 2^M := \text{Pot}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$ ist die Menge aller Teilmengen von M . Es ist $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ wenn $|M| \neq \infty$.

Definition 1.1.8: GEORDNETES PAAR (TUPEL)

$$(x, y) := \begin{cases} \{\{x, y\}, \{x\}\} & \text{falls } x \neq y \\ \{\{x\}\} & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Analog (iterativ) kann das für n -**Tupel** (n -tuple), also geordnete Kollektionen von n Elementen, definiert werden.

Definition 1.1.9: KARTESISCHES PRODUKT

Seien M, N beliebige, nicht-leere Mengen. Das (**kartesische**) **Produkt** von M und N ist

$$M \times N := \{(m, n) \mid m \in M, n \in N\}$$

Für kartesische Produkte einer Menge mit sich selbst schreibt man auch $M \times M =: M^2$.

Definition 1.1.10: RELATION

Eine (binäre) **Relation** R auf der Menge M auf die Menge N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.

Eine (binäre) **homogene Relation** oder **Endorrelation** über der Menge M ist eine Relation $R \subseteq M^2$.

Definition 1.1.11: ABBILDUNGEN

Eine Relation $f \subseteq M \times N$ heißt **Abbildung** (*mapping*) von M nach N , wenn gilt:

$\forall m \in M : \exists! n \in N : (m, n) \in f$ Dann, kurz: $f(m) = n$

Man schreibt: $f : M \rightarrow N, m \mapsto f(m) = n$

Man nennt M den **Definitionsbereich** (*domain*) von f .

Man nennt $f(M) := \{f(m) \mid m \in M\} \subseteq N$ den **Wertebereich** (*range*) bzw. **Bild** (*image*) von f .

Für $A \subseteq N$ nennt man $f^{-1}(A) := \{m \in M \mid f(m) \in A\}$ das **Urbild** (*preimage*).

Das Urbild einer einelementigen Menge $\{n\} \subseteq N$ heißt auch **Faser** (*fiber*) von f über n .

$\{(m, n) \mid m \in M \text{ und } n = f(m)\} =: \text{graph } f$

Definition 1.1.12: EINDEUTIGKEIT UND TOTALITÄT VON ABBILDUNGEN

Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung.

- f heißt **injektiv** (linkseindeutig): $\forall m_1, m_2 \in M : f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$
- f heißt **surjektiv** (rechtstotal): $\forall n \in N : \exists m \in M : f(m) = n$
- f heißt **bijektiv** (eindeutig), wenn f injektiv und surjektiv ist.

Definition 1.1.13: UMKEHRABBILDUNGEN

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **umkehrbar** oder **invertierbar**, wenn es eine Abbildung $f^{-1} : N \rightarrow M$ gibt, sodass $\forall m \in M : f^{-1}(f(m)) = m$ und $\forall n \in N : f(f^{-1}(n)) = n$ (beides muss gelten!).

f^{-1} heißt **Umkehrabbildung** oder **Inverse** von f .

Satz 1.1.14: UMKEHRBARKEIT

Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung.

- f ist invertierbar $\Leftrightarrow f$ bijektiv
- f invertierbar $\Rightarrow f^{-1}$ eindeutig

Definition 1.1.15: KOMPOSITION (VERKETTUNG)

Seien $A, B, C \neq \emptyset$ beliebige Mengen, und $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ zwei Abbildungen. Die **Verkettung** (oder **Verknüpfung**) $g \circ f : A \rightarrow C$ ist definiert durch $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, also $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$.

Übung 1.1.16: OPERATIONEN AUF ABBILDUNGSBEREICHEN

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, $A_1, A_2 \subseteq X$. Es gilt:

- $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

Definition 1.1.17: EINSCHRÄNKUNG

Seien X, Y Mengen, $A \subseteq X$ und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

Dann ist $f|_A : A \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$ die **Einschränkung** von f auf A .

Jede Abbildung kann durch Einschränkung auf eine geeignete Teilmenge injektiv gemacht werden.

1.2 Die reellen Zahlen

Definition 1.2.1: VERKNÜPFUNG

Eine Abbildung $\circ : M \times M \rightarrow M$ heißt (abgeschlossene) **Verknüpfung** über einer Menge M .
Für $(a, b) \mapsto c$ bzw. $\circ((a, b)) = c$ schreibt man dann auch kurz $a \circ b = c$ (*Infix-Notation*).

Definition 1.2.2: GRUPPE

Sei G eine *nicht-leere* Menge, $\circ : G \times G \rightarrow G$ eine Verknüpfung auf G . (G, \circ) heißt **Gruppe**, falls:

(G1) (**Assoziativgesetz**) $\forall x, y, z \in G : x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$

(G2) (**Neutrales Element/Einselement**) $\exists 1 \in G : \forall g \in G : 1 \circ g = g \circ 1 = g$
Dieses Element ist dann eindeutig.

(G3) (**Inverse Elemente**) $\forall g \in G : \exists g^{-1} \in G : g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = 1$
Diese Elemente sind jeweils eindeutig.

Falls zusätzlich **kommutativ**, heißt (G, \circ) **Abelsche Gruppe** und man nennt das Neutralelement manchmal stattdessen 0 und das Inverse $-g$.

Für $a, b \in G$ ist $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

Bemerkung 1.2.3: HALBGRUPPEN

- (G, \circ) heißt **Halbgruppe**, falls (G1) erfüllt ist.
- (G, \circ) heißt **Monoid** (Halbgruppe mit Eins), falls (G1), (G2) erfüllt sind.

Definition 1.2.4: KÖRPER

Sei K eine nicht-leere Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und \cdot . Das Tripel $\mathbb{K} := (K, +, \cdot)$ heißt **Körper** (*field*), falls gilt:

(K1) $(K, +)$ ist Abelsche Gruppe, das Neutralelement 0 (**Nullelement**).

(K2) (K, \cdot) ist kommutatives Monoid, das Neutralelement 1 (**Einselement**), und es sei $1 \neq 0$.

(K3) (K^*, \cdot) mit $K^* := K \setminus \{0\}$ ist Abelsche Gruppe mit Neutralelement 1 .

(K4) **Distributivgesetze**: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Axiom 1.2.5: DIE REELLEN ZAHLEN

Es existiert eine Menge \mathbb{R} mit folgenden Eigenschaften:

1. \mathbb{R} ist ein **Körper**.
 2. \mathbb{R} ist **angeordnet**, d.h. \exists Relation \leq sodass:
 - 2.1. \mathbb{R} ist **totalgeordnet**, d.h.
 - 2.1.1. \mathbb{R} ist **teilgeordnet**, d.h.
 - $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$ (*reflexiv*)
 - $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (*transitiv*)
 - $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (*injektiv*)
 - 2.1.2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \vee y \leq x$ (*total*)
 - 2.2. Die Ordnung ist verträglich mit Addition und Multiplikation, d.h. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:
 - 2.2.1. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
 - 2.2.2. $a \leq b, 0 \leq c \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$
3. \mathbb{R} ist **vollständig** (*complete*), d.h. jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge von \mathbb{R} besitzt ein Supremum in \mathbb{R} .

Die Elemente von \mathbb{R} heißen **reelle Zahlen**.

Es gilt: \mathbb{R} ist eindeutig. Es gibt keine anders strukturierte Menge mit diesen Eigenschaften.

Definition 1.2.6: SCHRANKEN

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$.

- a) c heißt **obere Schranke** (*upper bound*) von A , wenn $\forall a \in A : a \leq c$
- b) c heißt **untere Schranke** (*lower bound*) von A , wenn $\forall a \in A : c \leq a$
- c) $c =: \sup A$ heißt **Supremum** von A , wenn c die kleinste obere Schranke von A ist, d.h. für jede weitere obere Schranke d gilt: $c \leq d$.
- d) $c =: \inf A$ heißt **Infimum** von A , wenn c die größte untere Schranke von A ist, analog c).
- e) $c =: \max A$ heißt **Maximum** von A , wenn c das Supremum von A ist und $c \in A$.
- f) $c =: \min A$ heißt **Minimum** von A , wenn c das Infimum von A ist und $c \in A$.
- g) A heißt **nach oben beschränkt** (*bounded from above*), wenn A eine obere Schranke besitzt.
- h) A heißt **nach unten beschränkt** (*bounded from below*), wenn A eine untere Schranke besitzt.
- i) A heißt **beschränkt**, wenn A nach oben und unten beschränkt ist.

Satz 1.2.7: EINIGE RECHENREGELN IN \mathbb{R}

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- a) $a \leq b \wedge c \leq 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$
- b) $a \geq 0 \Leftrightarrow -a \leq 0$
- c) $a^2 := a \cdot a \geq 0$
- d) $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- e) $(-1) \cdot a = -a$
- f) $a \leq b \Rightarrow -a \geq -b$
- g) $1 > 0$

Axiom 1.2.8: UNENDLICHKEIT

Es gebe Objekte, die wir mit $-\infty$ und $+\infty$ bezeichnen, die *nicht* in \mathbb{R} enthalten sind und folgende Eigenschaft erfüllen: $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty$

Die Menge $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ heißt **Erweiterung** oder **Kompaktifizierung** von \mathbb{R} .

Definition 1.2.9: INTERVALLE, BETRÄGE

a) Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Mengen der Form

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $[a, b[:= [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $]a, b] := (a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- $]a, b[:= (a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

heißen **Intervalle**.

b) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $|x| := \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$ der **Betrag** von x .

c) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ das **Vorzeichen** (Signum) von x .

Lemma 1.2.10: BETRAGSEIGENSCHAFTEN

$\forall x, y \in \mathbb{R}$:

- a) $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- c) **Dreiecksungleichung:** $|x + y| \leq |x| + |y|$
- d) $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$

1.3 Natürliche, ganze, rationale Zahlen**Definition 1.3.1: INDUKTIVITÄT**

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt **induktiv**, falls gilt:

1. $0 \in M$
2. $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$

Satz 1.3.2: SCHNITT INDUKTIVER MENGEN

Durchschnitte induktiver Mengen sind wieder induktiv.

Definition 1.3.3: DIE NATÜRLICHEN ZAHLEN

Der Durchschnitt aller induktiven Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ wird mit \mathbb{N} bezeichnet:

$$\mathbb{N} := \bigcap_{\substack{M \subseteq \mathbb{R} \\ \text{induktiv}}} M := \bigcap \{M \subseteq \mathbb{R} \mid M \text{ induktiv}\}$$

Die Elemente von \mathbb{N} heißen **natürliche Zahlen**.

Offensichtlich gilt: \mathbb{N} ist induktiv und \mathbb{N} ist Teilmenge jeder induktiven Menge.

Satz 1.3.4: VOLLSTÄNDIGE INDUKTION

Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ induktiv, dann ist $M = \mathbb{N}$.

Dies erlaubt das bekannte Prinzip der Vollständigen Induktion: Gilt Aussage für $n = n_0 \in \mathbb{N}$ und für jedes n , für das sie gilt, folgt, dass sie auch für $n + 1$ gilt, dann gilt sie $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$. Alternativ kann man auch annehmen, dass die Induktionsannahme für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt, damit daraus die Aussage für $n + 1$ folgt.

Satz 1.3.5: RECHENREGELN IN DEN NATÜRLICHEN ZAHLEN

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gilt:

- $n + m \in \mathbb{N}$ und $n \cdot m \in \mathbb{N}$
- entweder $n = 0$ oder $n \geq 1$
- $\forall m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n : n - m \in \mathbb{N}$
- Zwischen n und $n + 1$ liegt keine natürliche Zahl.

Satz 1.3.6: REKURSIVE DEFINITIONEN

Ein Ausdruck $B(n)$ ist *eindeutig* für alle $n \in \mathbb{N}$ *definiert*, wenn folgendes gilt:

1. $B(0)$ ist definiert
2. $B(n + 1)$ wird rekursiv mit $B(n)$ definiert

Definition 1.3.7: EINIGE REKURSIVE DEFINITIONEN

Seien a_n, \dots, a_m mit $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$ beliebige reelle Zahlen. Es wird rekursiv definiert:

1. **Summen- und Produktzeichen:**

$$(a) \sum_{k=n}^n a_k := a_n \text{ und } \sum_{k=n}^{l+1} a_k := \sum_{k=n}^l a_k + a_{l+1} \text{ für } n \leq l, l+1 \leq m$$

$$(b) \prod_{k=n}^n a_k := a_n \text{ und } \prod_{k=n}^{l+1} a_k := \left(\prod_{k=n}^l a_k \right) \cdot a_{l+1} \text{ für } n \leq l, l+1 \leq m$$

Konvention: Für $n < m$ sei: $\sum_{k=n}^m a_k := 0$ (leere Summe) und $\prod_{k=n}^m a_k := 1$ (leeres Produkt).

2. **Fakultät:** $0! := 1$ und $(n + 1)! := n! \cdot (n + 1)$
3. **Potenz:** Für $x \in \mathbb{R}$ sei $x^0 := 1$ und $x^{n+1} := x^n \cdot x$.

Satz 1.3.8: GAUSS'SCHE SUMMENFORMEL

$$\text{Für } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ gilt: } 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Satz 1.3.9: GEOMETRISCHE SUMME

$$\text{Für } q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Satz 1.3.10: ARCHIMEDISCHE ANORDNUNG

\mathbb{R} ist ein **archimedisch angeordneter Körper**, d.h.: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : na > b$.
 $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} < a$

Definition 1.3.11: STANDARDMENGE

Die „**Standardmenge** n “ für $n \in \mathbb{N}$ ist $\underline{n} := \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n\}$, also alle nat. Z. zwischen 1 und n .

Definition 1.3.12: ENDLICHE MENGEN

Eine Menge A heißt **endlich** (*finite*), wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijekte Abbildung $c : \underline{n} \rightarrow A$ gibt. Wir nennen n die **Anzahl** oder **Mächtigkeit** der Menge A und schreiben $n =: \#A =: \text{Anz}(A) =: |A|$. Diese Zahl n ist für jede Menge eindeutig.

Satz 1.3.13: BESCHRÄNKTHEIT DER NATÜRLICHEN ZAHLEN

1. Jede nicht-leere Teilmenge von \mathbb{N} besitzt ein Minimum.
2. Jede (nicht-leere) endliche Teilmenge von \mathbb{N} besitzt ein Maximum.
3. \mathbb{N} ist **nicht** nach oben beschränkt.

Lemma 1.3.14: UNGLEICHUNGSRECHENREGELN IN REELLEN ZAHLEN

Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^+$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$.

- a) $x < y \Rightarrow (xz \leq yz \wedge (xz < yz \Leftrightarrow z \neq 0))$
- b) $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$
- c) $a < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < 0$
- d) $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Satz 1.3.15: BERNOULLI'SCHE UNGLEICHUNG

$$\forall x \in [-1, +\infty[\setminus \{0\} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2: (1+x)^n > 1+nx$$

Übung 1.3.16: BINOMISCHER LEHRSATZ

Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \leq k$ ist der **Binomialkoeffizient** definiert als $\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Für $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Definition 1.3.17: ABZÄHLBARKEIT

Eine Menge M heißt **abzählbar unendlich** (*countably infinite*), wenn es eine bijektive Abbildung $c: \mathbb{N} \rightarrow M$ gibt. Eine Menge heißt **abzählbar**, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist. Eine Menge, die *nicht* abzählbar ist, heißt **überabzählbar**.

Definition 1.3.18: GANZE UND RATIONALE ZAHLEN

- a) Die Elemente von $\mathbb{Z} := \{l \in \mathbb{R} \mid l \in \mathbb{N} \vee -l \in \mathbb{N}\}$ heißen **ganze Zahlen**.
- b) Die Elemente von $\mathbb{Q} := \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : x = \frac{p}{q}\right\}$ heißen **rationale Zahlen**.

Satz 1.3.19: GANZE UND RATIONALE ZAHLEN: EIGENSCHAFTEN

1. \mathbb{Q} ist ein angeordneter Körper.
2. \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{Q} (nach Cantor'schem Diagonalverfahren) sind abzählbar unendlich.
3. \mathbb{Q} ist *nicht* vollständig.

1.4 Die reellen Zahlen II**Satz 1.4.1: DICHTE TEILMENGEN**

Zwischen zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ liegt stets (mindestens) eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ und (mindestens) eine irrationale Zahl $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Man sagt, \mathbb{Q} und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **liegen dicht** in \mathbb{R} oder sind **dichte Teilmengen** von \mathbb{R} .

Definition 1.4.2: DEDEKIND'SCHER SCHNITT

(U, V) mit $U, V \subset \mathbb{R}$ heißt **Dedekindscher Schnitt**, falls gilt:

1. (U, V) ist eine Zerlegung (oder Partition) von \mathbb{R} , d.h.
 - (a) $U \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset$
 - (b) $U \cap V = \emptyset$
 - (c) $U \cup V = \mathbb{R}$
2. $U \leq V$, d.h. $\forall u \in U \forall v \in V : u \leq v$.

Satz 1.4.3: SCHNITZZAHL

Jeder Dedekind'sche Schnitt (U, V) hat *genau eine* Schnitzzahl $c \in \mathbb{R}$ mit $U \leq c \leq V$ (s.o.).

Es gilt: $c = \sup U = \inf V$

Dies gilt genau dann, wenn \mathbb{R} vollständig ist, eine Alternative zum Vollständigkeitsaxiom (1.2.5.3).

Definition 1.4.4: WURZELN

Sei $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $U := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \vee x^n \leq a\}$, $V := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x^n > a\}$.

Die Schnitzzahl von (U, V) wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet. Für ungerade n wird $\sqrt[n]{-a} := -\sqrt[n]{a}$ definiert.

Für $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ wird definiert: $a^{p/q} := \sqrt[q]{a^p} := \sqrt[q]{\frac{1}{a^{-p}}}$ wenn $a > 0$. Man definiert auch $\sqrt[2]{a} := \sqrt{a}$.

Satz 1.4.5: WURZELGESETZE

Seien $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Es gilt:

- a) $(\sqrt[n]{a})^n = a$
- b) $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|$
- c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Satz 1.4.6: AGM-UNGLEICHUNG

Seien $a_1, \dots, a_n \geq 0$. Dann gilt:

$$\underbrace{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}}_{\text{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k}_{\text{arithmetisches Mittel}}$$

1.5 Komplexe Zahlen**Definition 1.5.1: KOMPLEXE ZAHLEN**

\mathbb{R}^2 : Addition wie üblich, Multiplikation: $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$.

Bezeichnung: \mathbb{C} „**komplexe Zahlen**“

Einbettung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 0)$ injektiv, also sagt man „ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ “.

\rightarrow Körper. Es gilt: $1_{\mathbb{C}} = (1, 0) \hat{=} 1_{\mathbb{R}}$ und $0_{\mathbb{C}} = (0, 0) \hat{=} 0_{\mathbb{R}}$

$i := (0, 1)$ „**imaginäre Einheit**“ mit $i^2 = -1$.

Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} := a - ib$ das **komplex konjugierte** zu z

und $|z| := \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ der **Betrag** (Norm).

\mathbb{C} ist *nicht* angeordnet.

Definition 1.5.2:

- $\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergiert absolut $\forall z \in \mathbb{C}$.
- $\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ konvergiert absolut $\forall z \in \mathbb{C}$.
→ $\sin(-z) = -\sin z$
- $\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ konvergiert absolut $\forall z \in \mathbb{C}$.
→ $\cos(-z) = \cos z$

Satz 1.5.3: EULER'SCHE FORMEL

Für $z \in \mathbb{C}$ ist $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

Satz 1.5.4: POLARDARSTELLUNG

Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ hat eine eindeutige Darstellung in **Polarkoordinaten**:

$$z = |z| e^{i\varphi} \text{ mit } \varphi \in]-\pi, \pi]$$

Man nennt $\varphi =: \arg z$ „**Argument**“ von z , dieses stellt den Winkel von der positiven x -Achse aus dar.

2 Folgen und Reihen

2.1 Folgen

Definition 2.1.1: FOLGE

Eine (unendliche) (Zahlen-) **Folge** (*sequence*) ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a(n) := a_n$.
Man schreibt auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_n$ oder (a_n) , je nach Verständlichkeit im Kontext.

Definition 2.1.2: BESCHRÄNKTHEIT

Die Folge (a_n) ist nach

oben	unten
------	-------

beschränkt, wenn $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach

oben	unten
------	-------

 beschränkt ist.

Definition 2.1.3: KONVERGENZ

- a) Eine Folge (a_n) heißt **konvergent** gegen $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geq n_0 : |a_n - \alpha| < \varepsilon$
Bezeichne $\alpha =: \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$ oder einfach $a_n \rightarrow \alpha$, wenn es im Kontext klar ist.
Konvergiert (a_n) gegen 0, so nennt man (a_n) eine **Nullfolge**.
- b) Eine Folge (a_n) heißt **divergent**, wenn sie nicht konvergent ist.
Insbesondere heißt (a_n) **bestimmt divergent** gegen $\pm\infty$, wenn folgendes gilt:
- $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists n_0(M) : \forall n \geq n_0 : a_n \geq M$
 - $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0 : \exists n_0(M) : \forall n \geq n_0 : a_n \leq M$
- Eine divergente Folge, die nicht bestimmt divergent ist, heißt **unbestimmt divergent**.
- c) Eine Folge (a_n) heißt **absolut konvergent**, wenn $(|a_n|)$ konvergiert.
Es gilt: $(a_n) \rightarrow \alpha \Rightarrow (|a_n|) \rightarrow |\alpha|$. Die Umkehrung (ob konvergent) gilt nicht!

Satz 2.1.4: ALTERNATIVE EPSILON-KRITERIEN

Äquivalent zu $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ in 2.1.3.a) ist:

- a) $|a_n - \alpha| \leq \varepsilon$
- b) $|a_n - \alpha| < \gamma\varepsilon$ mit $\gamma > 0$ konstant, d.h. unabhängig von ε .

Satz 2.1.5: KONVERGENZ UND BESCHRÄNKTHEIT

Jede konvergente Folge ist beschränkt. Die Umkehrung gilt nicht!

Lemma 2.1.6: KONSTANTE FOLGEN

Konstante Folgen (a_n) , also $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = a = \text{const.} \in \mathbb{R}$, sind konvergent gegen die Konstante a .

Satz 2.1.7: GRENZWERTSÄTZE (GWS)

Es seien $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $a_n \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ und $b_n \rightarrow \beta \in \mathbb{R}$.

1. $(a_n + b_n) \rightarrow \alpha + \beta$
2. $(a_n - b_n) \rightarrow \alpha - \beta$
3. $(a_n \cdot b_n) \rightarrow \alpha \cdot \beta$

Und ist $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$ und $\beta \neq 0$:

4. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \rightarrow \frac{\alpha}{\beta}$

Beispiel 2.1.8: HARMONISCHE FOLGE

Die harmonische Folge ist die Folge der Kehrwerte der natürlichen Zahlen, also: $a_n := \frac{1}{n}$ mit $n \geq 1$. Es gilt: $a_n \rightarrow 0$ und (a_n) ist beschränkt mit $\inf(a_n) = 0$ und $\sup(a_n) = 1$.

Satz 2.1.9: KONVERGENZ UND DIVERGENZ VON QUOTIENTENFOLGEN

Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$.

- a) $a_n \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}, (b_n)$ bestimmt divergent $\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$
- b) (a_n) bestimmt divergent, $b_n \rightarrow \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n}$ bestimmt divergent, wobei:

$\beta \setminus \lim a_n$	$+\infty$	$-\infty$
> 0	$+\infty$	$-\infty$
< 0	$-\infty$	$+\infty$

- c) $(a_n) \rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n}$ divergent, wobei mit einem festen $N \in \mathbb{N}$ gilt:

- (i) $\forall n \geq N : b_n > 0, \alpha > 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$
- (ii) $\forall n \geq N : b_n < 0, \alpha > 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow -\infty$

usw...

Beispiel 2.1.10: FOLGEN RATIONALER FUNKTIONEN

Für Folgen der Form $a_n := \frac{a+bn+cn^2+\dots}{d+en+fn^2+\dots}$ kürzt man zunächst mit der größten Potenz des Nenners und untersucht dann Zähler- und Nennerfolgen einzeln auf Konvergenz.

Satz 2.1.11: EINSCHLIESSUNGSSATZ/„SANDWICH-THEOREM“

Seien $(a_n), (b_n)$ und (c_n) Folgen, wobei $a_n \rightarrow \alpha$ und $c_n \rightarrow \alpha$ und für ein festes $N \in \mathbb{N}$ sei $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N : a_n \leq b_n \leq c_n$. Dann folgt, dass auch $b_n \rightarrow \alpha$.

Beachte: Ist (a_n) konvergent und $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < c \in \mathbb{R}$, so gilt i.A. nur $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq c$ (nicht echt kleiner).

Definition 2.1.12: MONOTONE FOLGEN

- (a_n) heißt (schwach) **monoton wachsend** (*monotonically increasing*), wenn gilt:
 $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} \leq a_{n_2}$. Man schreibt: $(a_n) \nearrow$.
- (a_n) heißt **strikt/streng monoton wachsend**, wenn gilt: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} < a_{n_2}$.
- (a_n) heißt (schwach) **monoton fallend** (*monotonically decreasing*), wenn gilt:
 $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} \geq a_{n_2}$. Man schreibt: $(a_n) \searrow$.
- (a_n) heißt **strikt/streng monoton fallend**, wenn gilt: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} > a_{n_2}$.

Satz 2.1.13: MONOTONIEKRITERIUM

Sei (a_n) monoton

wachsend	und nach	oben
fallend		unten

 beschränkt.

Dann ist (a_n) konvergent und es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left| \begin{array}{l} \sup(a_n) \\ \inf(a_n) \end{array} \right|$ Die Umkehrung gilt i.A. nicht!

Beispiel 2.1.14: EIN PAAR FOLGEN

- Sei $x_1 := 1, x_{n+1} := \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}$. Es gilt: $(x_n) \rightarrow \sqrt{2}$
- Sei $x_n := \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n$ mit $m \in \mathbb{Z}, n > |m|$. Es gilt: $(x_n) \rightarrow e^m$ So wird die **Eulersche Zahl** e definiert.
- $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 0, \frac{n!}{n^n} \rightarrow 0, \sqrt[n]{n} \rightarrow 1, \sqrt[n^2]{n!} \rightarrow 1$

Definition 2.1.15: INTERVALLSCHACHTELUNG

Seien $I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$ Intervalle (d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$).

Die „Folge“ (I_n) heißt **Intervallschachtelung** (*nested intervals*), falls gilt:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} \subseteq I_n$
2. $|I_n| = b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (Intervallgröße)

Satz 2.1.16: INTERVALLSCHACHTELUNGSPRINZIP

Jede Intervallschachtelung zieht sich auf *genau einen* Punkt $\xi \in \mathbb{R}$ zusammen, d.h. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\xi\}$.

Definition 2.1.17: TEILFOLGE

Sei (a_n) eine beliebige Folge und $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ *streng* monoton wachsende Folge.

Dann heißt $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ **Teilfolge** (T.f.) von (a_n) .

Satz 2.1.18: KONVERGENZ UND TEILFOLGEN

- a) Konvergiert (a_n) gegen α , dann konvergiert auch *jede* T.f. gegen α .
- b) Besitzt eine monotone Folge eine konvergente T.f., so konvergiert die gesamte Folge gegen den Grenzwert der Teilfolge.
- c) Jede Folge besitzt eine monotone T.f.

Satz 2.1.19: SATZ VON BOLZANO-WEIERSTRASS FÜR FOLGEN

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. (Gilt nicht in \mathbb{Q} !)

Äquivalent: Jede beschränkte Folge hat *mindestens* einen Häufungswert in \mathbb{R} (ohne $\pm\infty$).

Definition 2.1.20: CAUCHY-FOLGE

(a_n) heißt **Cauchy-Folge** oder **Fundamentalfolge**, falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$
Wieder gilt 2.1.4 für das ε -Kriterium.

Satz 2.1.21: EIGENSCHAFTEN DER CAUCHY-FOLGE

- a) Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge.
- b) Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.
- c) Jede Cauchy-Folge ist konvergent in \mathbb{R} (nicht in \mathbb{Q} !).

2.2 Reihen**Definition 2.2.1: REIHE**

- a) Eine Folge von **Partialsommen** $(S_n) := \left(\sum_{k=0}^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt (unendliche) **Reihe** (*series*).

Konvergiert die Folge von Partialsommen, schreibt man $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$.

- b) Eine Reihe heißt **absolut konvergent**, wenn $\left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right)_n$ konvergent ist.
- c) Eine Reihe heißt **bedingt konvergent**, wenn sie konvergent, aber nicht absolut konvergent ist.

→ Sätze über Folgen sinngemäß übertragen.

Bemerkung 2.2.2: MONOTONIE VON REIHEN

Ist $\forall k \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} a_k \geq 0 \\ a_k > 0 \end{array} \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^n a_k \right)_n \begin{array}{l} \text{monoton} \\ \text{streng monoton} \end{array} \begin{array}{l} | \\ | \end{array} \text{wachsend.}$

Satz 2.2.3: CAUCHY'SCHES KONVERGENZKRITERIUM

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \forall n, m \geq n_0(\varepsilon), m > n : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$

→ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (Restglied) und $a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

Satz 2.2.4: KONVERGENZ UND BESCHRÄNKTHEIT VON REIHEN

Sei $\forall k \in \mathbb{N} : \alpha_k \geq 0$. Dann gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ konvergent $\Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \right)_n$ beschränkt.

Beispiel 2.2.5: WICHTIGE REIHEN

- a) **Harmonische Reihe:** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.
- b) **Geometrische Reihe:** $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$.

Satz 2.2.6: NULLMENGEN

Zu beliebigen $\varepsilon > 0$ existieren abzählbar viele Intervalle $(I_n)_n$, sodass $\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |I_n| = \varepsilon$.
Mengen mit dieser Eigenschaft (hier \mathbb{Q}) heißen **Nullmengen**.

Satz 2.2.7: UMORDNUNGSPRINZIP

In **konvergenten** Reihen darf man ohne Änderung des Grenzwerts unendlich viele Klammern setzen, i.A. aber nicht weglassen.

Satz 2.2.8: UNENDLICHES DISTRIBUTIVGESETZ

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent.

- a) $S := \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergent und $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.
- b) $S := \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k)$ konvergent und $S = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Satz 2.2.9: MAJORANTEN-/MINORANTEN-KRITERIUM (COMPARISON TEST)

Es gelte $\forall k \geq k_0 : 0 \leq a_k \leq b_k$ für ein festes $k_0 \in \mathbb{N}$.

- a) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent. Dann heißt $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ **konvergente Majorante**.
- b) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent (d.h. $+\infty$) $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent. Dann heißt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **divergente Minorante**.

Beispiel 2.2.10: RIEMANN'SCHE ZETA-FUNKTION

Sei $\zeta(\alpha) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Es gilt:

- $\zeta(\alpha)$ ist divergent für $\alpha < 1$.
- $\zeta(\alpha)$ ist konvergent für $\alpha \geq 2$.
- $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

Satz 2.2.11: QUOTIENTENKRITERIUM (RATIO TEST)

Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ fest und $\forall k \geq k_0 : a_k > 0$.

1. $\exists 0 < q < 1 : \exists k_1 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_1 : \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent
2. $\exists k_1 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_1 : \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$
3. $\limsup \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert

Satz 2.2.12: WURZELKRITERIUM (ROOT TEST)

Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ fest und $\forall k \geq k_0 : a_k > 0$.

1. $\exists 0 \leq q < 1 : \exists k_1 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_1 : \sqrt[k]{a_k} \leq q \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent
2. $\exists k_1 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_1 : \sqrt[k]{a_k} \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$
3. $\limsup \sqrt[k]{a_k} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert

Satz 2.2.13: DEZIMALBRUCHENTWICKLUNG

- a) Zu jedem $a \in]0, 1[$ existiert eine Folge $(z_i)_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, sodass $a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{10^k}$.
(„ $a = 0, z_1 z_2 z_3 \dots$ “) Dies ist die **dekadische Entwicklung**.
- b) Allgemein: Sei $g \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, dann gilt: $\forall a \in]0, 1[: \exists (z_i)_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \subseteq \{0, 1, \dots, g-1\} : a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{g^k}$
Man nennt dies die **g -adische Entwicklung**.
- c) Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann $\exists n \in \mathbb{Z}, g \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, (z_k) \subseteq \{0, 1, \dots, g-1\} : a = n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{g^k}$
- d) Die Dezimalbruchentwicklung ist auf \mathbb{R} *nicht* eindeutig (z.B. $0, \bar{9} = 1$).
Sie ist aber auf Intervallen $]n, n+1[$ mit $n \in \mathbb{Z}$ eindeutig.

Satz 2.2.14: ÜBERABZÄHLBARKEIT DER REELLEN ZAHLEN

\mathbb{R} ist überabzählbar. Jedes Intervall auf \mathbb{R} ist ebenfalls überabzählbar.
→ Die Menge der 0-1-Folgen $(a_n) \subseteq \{0, 1\}$ ist also überabzählbar.

Satz 2.2.15: LEIBNIZKRITERIUM (ALTERNATING SERIES TEST)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **alternierend** (d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : \text{sgn}(a_n a_{n+1}) = -1$), und $(|a_n|)$ eine *monoton fallende Nullfolge*.

Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und es gilt $\left| \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^n a_k}_{= \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k : \text{Restglied}} \right| \leq |a_{n+1}|$.

Übung 2.2.16: BESTIMMUNG EINER REIHE BIS AUF BESTIMMTEN FEHLER

Um den Wert einer *alternierenden* Reihe S mit Partialsummenfolge S_n am Index K bis auf einen *bekannt* Fehler $F \geq |S - S_k| \forall k > K \in \mathbb{N}$ zu bestimmen, zeige zunächst, dass sie konvergent nach Leibniz ist. Dann gilt nach dem Leibnizkriterium: $|S - S_k| \leq |S_{k+1}|$. Suche also durch Lösen der Gleichung $|S_K| = F$ das K , für das das Restglied nur noch maximal der gegebene Fehler F ist.

Satz 2.2.17: VERDICHTUNGSSATZ VON CAUCHY (CAUCHY CONDENSATION THEOREM)

Seien $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 0$ und $(a_n) \searrow$. Dann gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert

Satz 2.2.18: ABSOLUTE KONVERGENZ

Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent. Die Umkehrung gilt i.A. nicht!

Satz 2.2.19: RIEMANN'SCHER UMORDNUNGSSATZ (RIEMANN REARRANGEMENT THEOREM)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bedingt konvergent und $S \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl.
 \Rightarrow Es existiert eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, die gegen S konvergiert und es existiert insbesondere eine divergente Umordnung.

Satz 2.2.20: UMORDNUNG ABSOLUT KONVERGENTER REIHEN

Absolut konvergente Reihen konvergieren in jeder Umordnung gegen den gleichen Grenzwert.

Satz 2.2.21: CAUCHYPRODUKT

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent.

Dann ist die **Produktreihe** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$ konvergent. Insbesondere gilt $c_n = \sum_{\substack{k,l=0 \\ k+l=n}}^n a_k b_l$

Also: $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$, ...

Definition 2.2.22: l^p -RÄUME

Sei $p \in [1, +\infty[$. Wir definieren $l^p := \{(a_n) \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p < +\infty\}$.

Satz 2.2.23:

Sei $1 \leq p \leq q < +\infty$. Dann gilt: $l^p \subseteq l^q$

Definition 2.2.24: EXPONENTIALFUNKTION

Die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ heißt **Exponentialfunktion** (e -Funktion).

Satz 2.2.25: FUNKTIONSGLEICHUNG DER EXPONENTIALFUNKTION

$\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = \exp(x+y)$

Bemerkung 2.2.26: EIGENSCHAFTEN DER EXPONENTIALFUNKTION

1. $\exp(0) = 1, \exp(1) = e \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: \exp(k+1) = e^{k+1}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}: \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}: \exp(x) > 0$
4. $\forall x \in \mathbb{Q}: \exp(x) = e^x$
5. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sei $e^x := \exp(x)$ (Definition!).
6. \exp ist streng monoton wachsend, bijektiv, stetig auf \mathbb{R} , $e^n \rightarrow \infty, e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ (siehe später).

Definition 2.2.27: NATÜRLICHER LOGARITHMUS

Die e -Funktion ist bijektiv und damit umkehrbar.

Die Umkehrfunktion heißt (**natürlicher**) **Logarithmus**, $\ln := \log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

In der Analysis üblich wird der natürliche Logarithmus mit \log bezeichnet und andere Basen als e werden nicht betrachtet. In diesem Dokument werde ich zur Eindeutigkeit allerdings \ln verwenden.

Definition 2.2.28: REELLE POTENZEN

Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $a^x := e^{x \cdot \ln a}$.

Satz 2.2.29: LOGARITHMUSGESETZE

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{R}$:

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln(x^z) = z \cdot \ln x$

2.3 Häufungswerte von Folgen**Definition 2.3.1: HÄUFUNGSWERT**

$\alpha \in \mathbb{R}$ ist **Häufungswert** (HW) der Folge $(a_n) : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - \alpha| < \varepsilon\}$ ist unendliche Menge
 $\alpha \in \{-\infty, +\infty\}$ ist HW von $(a_n) : \Leftrightarrow \exists$ Tf. von (a_n) , die gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$ divergiert.

Satz 2.3.2: HW UND TEILFOLGEN

α ist HW von $(a_n) \Leftrightarrow \exists$ Tf. von (a_n) , die gegen α konvergiert

Satz 2.3.3: KONVERGENZ UND HW

$a_n \rightarrow \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow (a_n)$ hat genau einen HW in $\overline{\mathbb{R}}$, nämlich α .

Definition 2.3.4: LIMES SUPERIOR/INFERIOR

Sei (a_n) eine Folge.

- $\overline{\lim} a_n := \limsup a_n := \sup \{\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \mid \alpha \text{ HW von } (a_n)\}$ (**Limes superior**)
- $\underline{\lim} a_n := \liminf a_n := \inf \{\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \mid \alpha \text{ HW von } (a_n)\}$ (**Limes inferior**)

Satz 2.3.5: GWS FÜR SUPERIOR/INFERIOR

Seien $(a_n), (b_n)$ beliebige Folgen, $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt, sofern die rechten Seiten definiert sind:

1. $\limsup(\lambda a_n) = \lambda \limsup(a_n)$
2. $\limsup(a_n) = -\limsup(-a_n)$
3. $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$
4. $\limsup(a_n + b_n) \geq \limsup a_n + \liminf b_n$
5. $\limsup(a_n + b_n) = \limsup a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, falls (b_n) konvergent

wobei *hier* gilt:

- $+\infty + (+\infty) = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) \cdot \lambda = +\infty$ wenn $\lambda > 0$
- $(+\infty) \cdot \lambda = -\infty$ wenn $\lambda < 0$
- $(-\infty) \cdot \lambda = -\infty$ wenn $\lambda > 0$
- $(-\infty) \cdot \lambda = +\infty$ wenn $\lambda < 0$
- $+\infty + \lambda = +\infty$
- $-\infty + \lambda = -\infty$

Nicht definiert sind:

- $+\infty + (-\infty)$ und $-\infty + (+\infty)$
- $0 \cdot (\pm\infty)$

Satz 2.3.6: HAUPTSATZ

Sei \mathbb{K} ein archimedisch angeordneter Körper. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. **Supremum-Eigenschaft:** Jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge von \mathbb{K} besitzt ein Supremum.
2. **Dedekind'scher Schnitt:** Jeder Dedekind'sche Schnitt hat genau eine Schnitzzahl.
3. **Monotoniekriterium:** Jede nach oben beschränkte monoton wachsende Folge ist konvergent.
4. **Intervallschachtelungseigenschaft:** Jede Intervallschachtelung zieht sich auf genau einen Punkt zusammen.
5. **Satz von Bolzano-Weierstraß:** Jede beschränkte Folge hat min. eine konvergente Tf.
6. **Vollständigkeit:** Jede Cauchy-Folge in \mathbb{K} ist konvergent.

3 Räume

3.1 Metrische Räume

Definition 3.1.1: METRIK & METRISCHER RAUM

Existiert zu einer Menge $E \neq \emptyset$ eine Abbildung $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(M1) **Positive Definitheit:** $\forall x, y \in E : d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) **Symmetrie:** $\forall x, y \in E : d(x, y) = d(y, x)$

(M3) **Dreiecksungleichung:** $\forall x, y, z \in E : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

so heißt d **Metrik** und (E, d) heißt **metrischer Raum** (*metric space*).

(E muss weder Körper, noch geordnet sein!)

Beispiel 3.1.2: EINIGE METRIKEN

a) $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$: Seien $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$d(x, y) := \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}$ heißt **Euklidische Metrik**.

b) E beliebig. Für $x, y \in E$ heißt $d(x, y) := \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ die **diskrete Metrik**.

Sei im folgenden Rest des Kapitels (E, d) ein beliebiger metrischer Raum.

Definition 3.1.3: UMGEBUNG UND INNERES

- a) Seien $\varepsilon > 0$, $x \in E$. Man nennt $\mathcal{U}_\varepsilon := \{y \in E \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ die **offene ε -Umgebung** von x .
Alternative Bezeichnungen: $\mathcal{K}_\varepsilon(x)$ „offene Kugel“, oder $\mathcal{B}_\varepsilon(x)$ "open ball"
 Man nennt $\mathcal{S}_\varepsilon(x) := \{y \in E \mid d(x, y) = \varepsilon\}$ die **Sphäre** um x mit Radius ε .
 Man nennt $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$ die **punktierte ε -Umgebung** von x (mit „ x rausgesaugt“).
- b) $x \in M \subseteq E$ heißt **innerer Punkt** (*interior point*) von M , wenn gilt: $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \subseteq M$
- c) $M \subseteq E$ heißt **offen**, wenn jedes Element von M auch innerer Punkt von M ist.
 M offen $\Leftrightarrow M = \text{int } M$
- d) Sei $M \subseteq E$. $\text{int } M := \overset{\circ}{M} := \{x \in M \mid x \text{ innerer Punkt von } M\}$ heißt **Inneres** (*interior*) von M .

Definition 3.1.4: ABGESCHLOSSENHEIT

Sei $M \subseteq E$.

- a) $x \in E$ heißt **Häufungspunkt** (HP) (*accumulation point*) von M , falls gilt:
 $\forall \varepsilon > 0 : \exists y \in M, y \neq x : d(x, y) < \varepsilon$
 (d.h. $\forall \varepsilon > 0 : (\mathcal{U}_\varepsilon(x) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$)
- b) $M \subseteq E$ heißt **abgeschlossen** (*closed*), wenn M alle ihre HPe enthält.
- c) $\overline{M} := \bigcap \{A \subseteq E \mid M \subseteq A, A \text{ abgeschlossen}\} = \{\text{HPe von } M\}$
 heißt **abgeschlossene Hülle** (*closure*) von M .
- d) $\partial M := \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$ heißt der **Rand** (*boundary*) von M .

Beispiel 3.1.5: FÜR INTERVALLE

Die Intervalle $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ mit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ sind immer offen und heißen daher **offene Intervalle**.
 Die Intervalle $[a, b]$ sind immer abgeschlossen.

Satz 3.1.6: OFFEN & ABGESCHLOSSEN UNTER MENGENOPERATIONEN

- a) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.
- b) *Endliche* Schnitte offener Mengen sind offen.
- c) Beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
- d) *Endliche* Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
- e) $M \subseteq E$ abgeschlossen $\Leftrightarrow E \setminus M$ (Komplement) offen

Satz 3.1.7: HÄUFUNGSPUNKT ALT.

Es gilt: $x \in E$ ist HP von $M \subseteq E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : |\mathcal{U}_\varepsilon(x)| = \infty$

Definition 3.1.8: FOLGEN IM METRISCHEN RAUM

- a) Folge (a_n) in (E, d) , d.h. Abbildung $a : \mathbb{N} \rightarrow E$,
heißt **konvergent** gegen $\alpha \in E$, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : d(a_n, \alpha) < \varepsilon$.
- b) (a_n) heißt **Cauchyfolge**, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : d(a_n, a_m) < \varepsilon$

Satz 3.1.9: KONVERGENZ UND CAUCHYFOLGE

Im metrischen Raum (E, d) ist jede konvergente Folge auch eine Cauchyfolge.

Satz 3.1.10: VOLLSTÄNDIGKEIT

Ein metrischer Raum (E, d) ist **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in E auch konvergent in E ist.

Satz 3.1.11: FOLGEN IN REELLEN TUPELRÄUMEN

Sei $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathbb{R}^n mit $n \geq 1$ ((k) ist hier der Zählindex), wobei $x_i^{(k)}$ mit $i \in \underline{n}$ die Komponenten von $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ sind. Es gilt: $x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow x_i^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha_i \in \mathbb{R} \forall i \in \underline{n}$

Definition 3.1.12: BESCHRÄNKTHEIT UND KOMPAKTHEIT

- a) $M \subseteq E$ heißt **beschränkt**, wenn ein $c \in \mathbb{R}^+$ und ein $a \in M$ existieren, sodass $\forall x \in M : d(x, a) \leq c$.
- b) $M \subseteq E$ heißt **kompakt**, wenn jede Folge in M eine gegen ein Element von M konvergente Teilfolge besitzt.
- c) $M \subseteq E$ heißt **relativ kompakt** : $\Leftrightarrow \overline{M}$ kompakt.

Satz 3.1.13:

Es gilt für $M \subseteq E$: M kompakt $\Rightarrow M$ beschränkt und abgeschlossen
Für $E = \mathbb{R}^n$ gilt sogar „ \Leftrightarrow “ (dann entspricht es einem „**Satz von Bolzano-Weierstraß**“ für \mathbb{R}^n).
Damit gilt: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ rel. kompakt $\Leftrightarrow M$ beschränkt

Satz 3.1.14:

Sei (E, d) ein **vollständiger** metrischer Raum und $M \subseteq E$ abgeschlossen. Dann ist M vollständig.

Satz 3.1.15:

- a) *Endliche* Vereinigung kompakter Mengen sind kompakt.
- b) Beliebige Schnitte kompakter Mengen sind kompakt.
- c) $K \subseteq E$ kompakt, $A \subseteq K$ abgeschlossen $\Rightarrow A$ kompakt

Bemerkung 3.1.16:

In \overline{R} hat jede Folge eine Teilfolge, die gegen ein Element von \overline{R} strebt.

Satz 3.1.17: KOMPAKTHEIT ENDLICHER MENGEN

Endliche Mengen und \emptyset sind immer kompakt.

Definition 3.1.18: DICHTE TEILMENGEN

Sei $D \subseteq M \subseteq E$ und M abgeschlossen. D heißt **dicht** in M

$$: \Leftrightarrow \overline{D} = M$$

$$\Leftrightarrow \forall \xi \in M \exists \text{ Folge } (x_n) \subseteq D : x_n \rightarrow \xi$$

$$\Leftrightarrow \forall x_0 \in M \forall \varepsilon > 0 \exists x \in D : d(x, x_0) \leq \varepsilon$$

Übung 3.1.19:

$M \subseteq E$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow \forall (x_n)$ Folge in M mit Limes $\xi \in E$ ist $\xi \in M$.

Satz 3.1.20:

E selbst und \emptyset sind immer offen und abgeschlossen.
 → **Topologie** – Lehre der Nachbarschaftsbeziehungen

Satz 3.1.21:

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

Satz 3.1.22: BANACH'SCHER FIXPUNKTSATZ

Sei (E, d) ein *vollständiger* metrischer Raum und $f : E \rightarrow E$ eine Abbildung, die **kontrahierend** ist, d.h. $\exists q \in]0, 1[$, sodass $\forall x, y \in E : d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$.

Dann hat f genau einen **Fixpunkt**, d.h. ein $\hat{x} \in E$ mit $f(\hat{x}) = \hat{x}$, wobei \hat{x} der Grenzwert der Folge definiert durch $x_0 \in E$ beliebig, $x_{n+1} := f(x_n)$ ist, und es gelten die Fehlerabschätzungen

a) **A-priori:** $d(x_n, \hat{x}) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$

b) **A-posteriori:** $d(x_n, \hat{x}) \leq \frac{q}{1-q} d(x_n, x_{n-1})$ (genauer)

3.2 Normierte Räume

Definition 3.2.1: VEKTORRAUM

$\mathcal{V} \neq \emptyset$ heißt **Vektorraum** (VR) oder **linearer Raum** über dem Körper \mathbb{K} , falls Abbildungen

$$+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, (x, y) \mapsto x + y \quad \text{und} \quad \cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

existieren mit

(V1) $(\mathcal{V}, +)$ ist *Abelsche Gruppe* mit Neutralelement $0 \in \mathcal{V}$ und Inversen $-x$ für $x \in \mathcal{V}$.

(V2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \forall x \in \mathcal{V} : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

(V3) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x, y \in \mathcal{V} : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

(V4) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \forall x \in \mathcal{V} : (\lambda \mu)x = \lambda(\mu x)$

(V5) Für $1 \in \mathbb{K}$ ist $\forall x \in \mathcal{V} : 1x = x$

Lemma 3.2.2: TRIVIALE VEKTORRAUMEIGENSCHAFTEN

Im VR \mathcal{V} über \mathbb{K} gilt $\forall x \in \mathcal{V}$:

- $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{\mathcal{V}}$
- $(-1) \cdot x = -x$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} : (-\lambda) \cdot x = -(\lambda x) = \lambda(-x)$

Definition 3.2.3: NORM & NORMIERTER RAUM

Sei N ein VR über \mathbb{R} („reeller VR“). Existiert eine Abbildung $\|\cdot\| : N \rightarrow \mathbb{R}$ mit

(N1) **Positive Definitheit:** $\forall x \in N : \|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow x = 0_N$

(N2) **Homogenität:** $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in N : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(N3) **Dreiecksungleichung:** $\forall x, y \in N : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

so heißt $\|\cdot\|$ **Norm** und $(N, \|\cdot\|)$ **normierter Raum**.

Satz 3.2.4: NORM UND METRIK

Jede Norm $\|\cdot\|$ induziert eine Metrik d durch $d(x, y) = \|x - y\|$ für x, y aus dem Raum. Damit sind alle normierten Räume auch metrische Räume und es gibt Folgen etc.

Definition 3.2.5: BANACHRAUM

Ein *vollständiger normierter Raum* heißt **Banachraum** oder \mathbb{B} -Raum.

Beispiel 3.2.6: EINIGE BANACHRÄUME

1. \mathbb{R}^n ist Banachraum mit $\|x\| := \|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ „euklidische Norm“, der „euklidische Raum“.
2. \mathbb{R}^n ist Banachraum mit $\|x\|_{\infty} := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
3. l^p mit $1 \leq p < +\infty$, $a = (a_n)_n \in l^p$ und $\|a\|_{l^p} := \|a\|_p := \sqrt[p]{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p}$ ist Banachraum.
4. $l^{\infty} := \{a = (a_n)_n \mid \|a\|_{\infty} := \sup |a_n| < +\infty\}$ (Raum der beschränkten Folgen) ist Banachraum.

4 Funktionen

Definition 4.0.1: FUNKTION

Eine Abbildung $f : D \rightarrow W$ mit $D, W \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Funktion**.

Definition 4.0.2: GRENZWERT EINER FUNKTION

Sei $f : D \rightarrow W$ eine Funktion, $(x_n) \subseteq D$ Folge mit $x_n \rightarrow \xi \in \overline{\mathbb{R}}$. (für $\xi \in \mathbb{R}$ statt $\overline{\mathbb{R}}$ ist $\xi \in \overline{D}$).
Gibt es ein $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$, sodass \forall Folgen $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \rightarrow \xi \in \overline{\mathbb{R}}$ und $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq \xi$ gilt: $f(x_n) \rightarrow \eta$, so schreibt man $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) := \eta$.

Definition 4.0.3: RECHTS- UND LINKSSEITIGER GRENZWERT

Sei $f : D \rightarrow W$ eine Funktion, $\xi \in \overline{D} \subseteq \mathbb{R}$.

a) **rechtsseitiger Limes:**

$\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}} : \Leftrightarrow \forall$ Folgen $(x_n) \subseteq D$ mit $(\forall n \in \mathbb{N} : x_n > \xi)$ und $x_n \rightarrow \xi$ gilt: $f(x_n) \rightarrow \eta$
(sofern solche Folgen existieren)

b) **linksseitiger Limes:**

$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}} : \Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq D, (\forall n \in \mathbb{N} : x_n < \xi), x_n \rightarrow \xi : f(x_n) \rightarrow \eta$ (ganz analog)

4.1 Stetigkeit

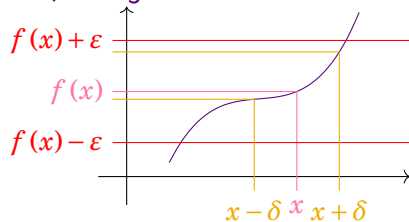
Definition 4.1.1: FOLGENSTETIGKEIT

Eine Funktion $f : D \rightarrow W$ ist

- stetig** (*continuous*) **in** $x \in D : \Leftrightarrow \forall$ Folge (y_n) mit $y_n \rightarrow x$ gilt: $f(y_n) \rightarrow f(x)$.
- Aus 4.0.2 folgt: f stetig in $\xi \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$
- stetig**, falls f stetig in allen $x \in D$ ist.

Satz 4.1.2: EPSILON-DELTA-KRITERIUM FÜR STETIGKEIT

Funktion $f : D \rightarrow W$ ist stetig in $x \in D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall y \in D : (|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$
oder, verallgemeinert auf metrische Räume (E, d) , alternativ: $d(y, x) < \delta \Rightarrow d(f(y), f(x)) < \varepsilon$



„Es gibt ein δ , sodass die Fkt.-werte im ε -Schlauch bleiben“

Definition 4.1.3: LIPSCHITZSTETIGKEIT & GLEICHMÄSSIGE STETIGKEIT

Sei $f : D \rightarrow W$ eine Funktion. f heißt

- a) **Lipschitzstetig** oder Lipschitzsch/Lipschitzabbildung, falls gilt:
 $\exists L > 0$ (**Lipschitzkonstante**), sodass $\forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.
- Allgemein für metrische Räume: $d_D(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_W(x, y)$
 - Eine Kontraktion ist Lipschitzabbildung mit $L < 1$.
- b) **gleichmäßig stetig** (*uniformly continuous*), falls gilt:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x, y \in D : (|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$

Satz 4.1.4: ZUSAMMENHANG DER STETIGKEITEN

Es gilt: Lipschitzstetig \Rightarrow gleichmäßig stetig \Rightarrow stetig
 Die Umkehrung gilt jeweils i.A. *nicht*.

Beispiel 4.1.5: WICHTIGE STETIGE FUNKTIONEN

- Jedes Monom und nach 4.2.5 damit jedes Polynom ist stetig.
- Jede Metrik und nach 3.2.4 damit jede Norm ist stetig.
- $\exp x$ ist stetig.
- \sqrt{x} ist stetig auf \mathbb{R}_0^+ .
 Aber: \sqrt{x} ist *nicht* Lipschitzstetig auf \mathbb{R}_0^+ , aber Lipschitzstetig auf $[a, \infty[\forall a > 0$.
- $\frac{1}{x}$ ist stetig! (nicht definiert in 0 \rightarrow 0 ist „egal“ für Stetigkeit)
 $\frac{1}{x}$ ist *nicht* gleichmäßig stetig (bei $\varepsilon = 1$ gibt es kein passendes δ).
- $\ln x$ ist stetig auf \mathbb{R}^+ .
- $\sqrt[n]{x}$ stetig auf \mathbb{R}_0^+ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Definition 4.1.6: RECHTS- UND LINKSSEITIGE STETIGKEIT

Sei $f : D \rightarrow W$ eine Funktion, $\xi \in \overline{D} \subseteq \mathbb{R}$.

- a) f ist **rechtsseitig stetig** in $\xi : \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = f(\xi)$
- b) f ist **linksseitig stetig** in $\xi : \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = f(\xi)$

Beispiel 4.1.7: GAUSSKLAMMER (FLOOR)

$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$, also das „Abrunden“ (*floor function*), ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und rechtsseitig stetig in allen $n \in \mathbb{Z}$, aber dort nicht „echt“ stetig.

Man schreibt manchmal auch $\lfloor x \rfloor$ und nennt diese Funktion **Gaußklammer**.

Der Eindeutigkeit wegen schreibe ich aber $[x]$.

4.2 Eigenschaften der Grenzwerte und Stetigkeit

Satz 4.2.1: GRENZWERTSÄTZE FÜR FUNKTIONEN

Seien $f, g : D \rightarrow W$ Funktionen im gleichen Raum, $\xi \in \overline{D} \subseteq \mathbb{R}$. Es gilt:

- Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\lim_{x \rightarrow \xi} (\alpha f(x) + g(x)) = \alpha \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) + \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$ (**Linearität**)

- $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) \right)$ $\cdot \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \xi} g(x)}$

sofern jeweils die rechten Seiten existieren.

Satz 4.2.2: GRENZWERTE UNTER VERKETTUNG

Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ Abbildungen, $\xi \in \overline{D}$, $\eta \in \overline{f(D)}$,
und es existiere $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ und $\lim_{y \rightarrow \eta} g(y)$. Dann existiert $\lim_{x \rightarrow \xi} (g \circ f)(x) = \lim_{y \rightarrow \eta} g(y)$.

Damit gilt: Ist f stetig in ξ und g stetig in $\eta = f(\xi)$, so ist $(g \circ f)$ stetig in ξ .

Satz 4.2.3:

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\exists z \in \mathbb{R} : D \supseteq]z, +\infty[$.

Dann gilt: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right)$, falls einer der beiden Grenzwerte existiert.

Analog für $] -\infty, z[\subseteq D$ und $x \rightarrow -\infty$ und dann $t \rightarrow 0^-$.

Satz 4.2.4:

Für geeignetes ξ gilt: $\lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)| = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = 0$

Satz 4.2.5: STETIGKEITSSÄTZE

Seien $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $\xi \in D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$.

Dann sind $f + g$, $f - g$, λf mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \cdot g$ stetig in ξ . Ist $g(\xi) \neq 0$, ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in ξ .

Satz 4.2.6: ZWISCHENWERTSATZ (ZWS) (INTERMEDIATE-VALUE THEOREM)

Seien $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und $a \leq \alpha < \beta \leq b$.

Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ an,

d.h. $\forall \eta \in [f(\alpha), f(\beta)] : \exists \xi \in [\alpha, \beta]$ mit $f(\xi) = \eta$.

Definition 4.2.7: MONOTONIE VON FUNKTIONEN

Die Funktion $f : D \rightarrow W$ heißt **monoton**

	wachsend	
	fallend	

, falls für $x, y \in D$ gilt: $x < y \Rightarrow$

	$f(x) \leq f(y)$	
	$f(x) \geq f(y)$	

Satz 4.2.8: STETIGKEIT DER UMKEHRFUNKTION

Sei f streng monoton wachsend auf $I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$.
 Dann existiert eine Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$, wobei $f(I) \subseteq [f(a), f(b)]$.
 Ist f stetig in ξ , so ist f^{-1} stetig in $f(\xi)$. Ist f stetig auf $[a, b]$, so ist $f(I) = [f(a), f(b)]$.

Satz 4.2.9:

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine geeignete Funktion. Folgende Aussagen sind **äquivalent**:

- f ist stetig in D .
- \forall abgeschlossene $A \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(A)$ abgeschlossen in \mathbb{R}
- \forall offene $A \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(A)$ offen in \mathbb{R} (**topologische Stetigkeit**)

Lemma 4.2.10: MINIMUMFUNKTION, MAXIMUMFUNKTION, BETRAG STETIGER FUNKTIONEN

Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann sind $\min(f, g)$, $\max(f, g)$ und $|f|$ stetig.
 (Definiert durch Funktionen $D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$, $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$, $x \mapsto |f(x)|$.)

Satz 4.2.11: EIGENSCHAFTEN STETIGER FUNKTIONEN AUF KOMPAKTA

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Dann gilt:

- $f(D)$ ist kompakt.
- f ist beschränkt, d.h. $\exists a, b \in \mathbb{R} \forall x \in D : a \leq f(x) \leq b$
- f nimmt Minimum und Maximum auf D an, d.h. $\exists c, d \in D : \forall x \in D : f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.
 $f(c)$ heißt **Minimum** von f , $(c, f(c))$ heißt **Tiefpunkt** vom Graphen von f und c heißt **Minimierer** von f . Analog **Maximum, Hochpunkt, Maximierer** für d .
- f ist gleichmäßig stetig.
- Ist $f : D \rightarrow f(D)$ stetig und **bijektiv**, dann ist $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ stetig.

Satz 4.2.12:

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion, x innerer Punkt von D mit $f(x) \neq 0$.
 Dann $\exists \varepsilon > 0 \forall y \in \mathcal{U}_\varepsilon(x) : f(y) \neq 0$

4.3 Folgen und Reihen von (stetigen) Funktionen**Definition 4.3.1: MENGE ALLER STETIGEN FUNKTIONEN**

Die Menge aller stetigen Funktionen auf $D \subseteq \mathbb{R}$ wird mit $C(D)$ bezeichnet.
 Ist $D = [a, b]$, so wird $C([a, b]) := C[a, b]$ geschrieben.

Satz 4.3.2: RAUM DER STETIGEN FUNKTIONEN

Sei $B \subseteq \mathbb{R}$ kompakt.
 Dann ist $C(B)$ versehen mit der Norm $\|f\|_{C(B)} := \|f\|_\infty := \max_{x \in B} |f(x)|$ für $f \in C(B)$ ein *Banachraum*.

Satz 4.3.3: RAUM DER BESCHRÄNKTEN FUNKTIONEN

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, ist $\|f\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)| < +\infty$ eine Norm.

Definition 4.3.4: KONVERGENZ VON FUNKTIONENSCHAREN

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $(f_k)_k$ eine Folge von Funktionen der Form $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ („Funktionenschar“).

- (f_k) heißt **punktweise konvergent** in $\xi \in D$ gegen $f(\xi)$, falls $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(\xi)$ existiert.
- (f_k) heißt **gleichmäßig konvergent** (*uniformly convergent*) auf D gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, falls gilt:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0(x) \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0 : \forall x \in D : |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$
- Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt: $f_k \xrightarrow{\text{gleichmäßig}} f \Leftrightarrow \|f_k - f\|_\infty \rightarrow 0$

Satz 4.3.5: WEIERSTRASS'SCHES MAJORANTENKRITERIUM

Sei $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\forall k \in \mathbb{N}, x \in D : |f_k(x)| < c_k)$ und sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k < +\infty$.

Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ absolut konvergent und gleichmäßig konvergent auf D .

Beispiel 4.3.6: FOURIER-REIHE

Seien $(a_k), (b_k)$ Folgen mit $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty$ und $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < +\infty$, also $(a_k), (b_k) \in l^1$.

$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx))$ (die **Fourier-Reihe**) konvergiert absolut und gleichmäßig nach 4.3.5.
 Man kann stetige Funktionen mit dieser Reihe darstellen.

Satz 4.3.7: STETIGKEIT UNTER KONVERGENZ

Sei $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ in ξ stetige Funktionenschar, die *gleichmäßig* gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.
 Dann ist f stetig in ξ .

Sei außerdem $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *gleichmäßig* konvergent auf D . Dann ist $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ stetig auf D .

Übung 4.3.8: NULLSTELLE VON POLYNOMEN

Jedes Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.

4.4 Potenzreihen**Definition 4.4.1: POTENZREIHE**

Eine **Potenzreihe** ist eine Reihe in \mathbb{C} der Form $P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$.
 $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt **Entwicklungszentrum** der Potenzreihe.

Satz 4.4.2: KONVERGENZ VON POTENZREIHEN

Sei $P(z)$ eine Potenzreihe.

Formel von Cauchy-Hadamard: Sei $\lambda := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ und $r := \begin{cases} +\infty & \text{falls } \lambda = 0 \\ 1/\lambda & \text{falls } \lambda \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{falls } \lambda = +\infty \end{cases}$

$P(z)$ ist absolut konvergent auf $\mathcal{K}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$.

$\forall r' < r$: $P(z)$ ist *gleichmäßig* konvergent auf $\mathcal{K}_{r'}(z_0)$, sodass $P(z)$ auf $\mathcal{K}_r(z_0)$ stetig ist.

r heißt **Konvergenzradius** von $P(z)$ und $\mathcal{K}_r(z_0)$ heißt **Konvergenzkreis**.

Es ist *keine* allgemeine Aussage über $\mathcal{S}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ möglich.

Bemerkung 4.4.3: ALTERNATIVE BERECHNUNG ZUR CAUCHY-HADAMARD-FORMEL

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \text{ falls der Grenzwert existiert.}$$

Beispiel 4.4.4: EINIGE WICHTIGE POTENZREIHEN

$$1. \exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \text{ (Entwicklungszentrum 0), } \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} \xrightarrow{\text{nach AGM}} 0 \Rightarrow r = +\infty$$

$$2. \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} 0 \cdot z^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!} z^k,$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \frac{1}{k!} & k \text{ ungerade} \end{cases} \Rightarrow \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = 0 \Rightarrow r = +\infty$$

$$3. \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \text{ mit } r = +\infty \text{ analog 2.}$$

Definition 4.4.5: HYPERBELFUNKTIONEN

$$1. \cosh z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \text{ „cosinus hyperbolicus“ mit } r = +\infty.$$

$$2. \sinh z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ „sinus hyperbolicus“ mit } r = +\infty.$$

Bemerkung 4.4.6: EIGENSCHAFTEN DER HYPERBELFUNKTIONEN

Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig.

- $\cosh(-z) = \cosh z$ und $\sinh(-z) = -\sinh z$
 $\Rightarrow \cosh 0 = 1$ und $\sinh 0 = 0$
- $e^z = \cosh z + \sinh z$ und damit $e^{-z} = \cosh z - \sinh z$
 $\Rightarrow \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ und $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$
- $\cosh(iz) = \cos z$ und $\sinh(iz) = i \cdot \sin z$

Satz 4.4.7: ADDITIONSTHEOREME

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

- $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$
- $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$
- $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$
- $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$

$$\Rightarrow \cos^2 z + \sin^2 z = 1 \text{ und } \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

Bemerkung 4.4.8: IM ERGEBNIS: NULLSTELLE DES SINUS

$\sin z$ konvergiert nach Leibniz. Dann gilt für $p \in \mathbb{N}$: $\exists \theta(p) \in]0, 1[$: $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \theta a_{p+1} (-1)^{p+1}$

$$\sin 2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} = \underbrace{\frac{2^1}{1!} - \frac{2^3}{3!}}_{\frac{2}{3}} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{=\theta \frac{2^5}{5!} (-1)^2 > 0} \Rightarrow \sin 2 > \frac{2}{3} > 0$$

$$\text{Analog: } \sin 4 = 4 - \underbrace{\frac{4^3}{3!} + \frac{4^5}{5!} - \frac{4^7}{7!} + \frac{4^9}{9!}}_{< -0,66} + \underbrace{\theta \frac{4^{11}}{11!} (-1)^5}_{< 0} \Rightarrow \sin 4 < 0$$

$\xrightarrow{\text{ZWS}}$ \sin muss in $]2, 4[$ (min.) eine Nullstelle haben.

Definition 4.4.9: π

Die kleinste Nullstelle des \sin in $]2, 4[$ wird mit π bezeichnet.

Bemerkung 4.4.10: WEITERE EIGENSCHAFTEN DER TRIGONOMETRISCHEN FUNKTIONEN

- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ und $\cos x > 0$ für $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und $\cos x < 0$ für $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi[$
- und $\sin x > 0$ für $x \in]0, \pi[$ und $\sin x < 0$ für $x \in]\pi, 2\pi[$
- \sin und \cos sind 2π -periodisch.
- \cos ist streng monoton fallend auf $[0, \pi]$.
- $\cos|_{[0, \pi]}$ hat stetige Umkehrfunktion: $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
- $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ hat stetige Umkehrfunktion: $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$ (**Euler-Identität**)

Satz 4.4.11: IDENTITÄTSSATZ FÜR POTENZREIHEN

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, $Q(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z - z_0)^n$ Potenzreihen mit $r_P, r_Q \geq \delta \in \mathbb{R}^+$.

Falls eine Folge (w_j) existiert mit $w_j \xrightarrow{\text{in } \mathbb{C}} z_0$ und $\forall j \in \mathbb{N} : (w_j \neq z_0 \text{ und } P(w_j) = Q(w_j))$, dann gilt $P = Q$, also $\forall k \in \mathbb{N} : \alpha_k = \beta_k$.

\Rightarrow Wenn f in einem Kreis um z_0 in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar ist, so ist diese Entwicklung (d.h. die Koeffizientenfolge) eindeutig. Eine solche Funktion nennt man **analytisch**.

\Rightarrow Hat $P(z)$ unendlich viele Nullstellen, die sich in z_0 häufen, dann ist $\forall z \in \mathbb{C} : P(z) = 0$.

5 Eindimensionale Differentialrechnung

5.1 Ableitungen

Definition 5.1.1: DIFFERENZIERBARKEIT

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 innerer Punkt von D .

f heißt in x_0 **differenzierbar** („diffbar“), falls $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existiert.

Dann heißt $f'(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ **Ableitung** oder Differentialquotient von f in x_0 .

Rechts-/linksseitig differenzierbar mit $\lim_{h \rightarrow 0^+}$ bzw. $\lim_{h \rightarrow 0^-}$.

Bezeichnung: $f'_+(x_0) := \frac{d^+f}{dx}(x_0)$ bzw. $f'_-(x_0) := \frac{d^-f}{dx}(x_0)$

Ist f diffbar $\forall x \in D$ (und D offen), so heißt f differenzierbar.

Sind Ableitungen diffbar (f „ n -mal diffbar“), so ist $f^{(n)} := \frac{d^n f}{dx^n} := (f^{(n-1)})'$ die **n -te Ableitung** von f .

Bemerkung 5.1.2: DIFFERENZIERBAR AUF ABGESCHLOSSENEN INTERVALLEN

Manchmal wird eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar genannt, wenn $f|_{]a, b[}$ diffbar ist und f in a rechtsseitig und in b linksseitig diffbar ist.

Satz 5.1.3: DIFFERENZIERBARKEIT UND STETIGKEIT

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in D$. Dann ist f stetig in x_0 . Die Umkehrung gilt i.A. *nicht*.

Analog: rechts-/linksseitig diffbar \Rightarrow rechts-/linksseitig stetig.

Satz 5.1.4: ABLEITUNGSREGELN

Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ (rechts-/linksseitig) diffbar in $x_0 \in D$. Dann gilt:

- Linearität:** $f + g$, $f - g$, λf mit $\lambda \in \mathbb{R}$ sind (rechts-/linksseitig) diffbar in x_0 , wobei $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$ und $(\lambda f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$.
- Produktregel:** $f \cdot g$ ist (rechts-/linksseitig) diffbar in x_0 , wobei $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
- Quotientenregel:** Ist $\forall x \in D : g(x) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in x_0 (rechts-/linksseitig) diffbar und $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Satz 5.1.5: KETTENREGEL

Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 diffbar und $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ diffbar.

Dann ist $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 diffbar und $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Lemma 5.1.6: ABLEITUNG DER UMKEHRFUNKTION

Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton $\left| \begin{array}{l} \text{fallend} \\ \text{steigend} \end{array} \right|$ und in $x_0 \in]a, b[$ diffbar, wobei $f'(x_0) \neq 0$.

Dann ist f^{-1} in $f(x_0)$ diffbar und $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Beispiel 5.1.7: DIFFERENZIERBARKEIT VON POLYNOMEN

Alle Monome und damit alle Polynome sind diffbar.

→ Ende des 1. Semesters.