Mathematische Ergänzungen zur Physik I

1. Semesterhälfte

Formelsammlung/Zusammenfassung

von Alexander Köster

Student der Universität Siegen, MM 2017

Dozent: Dr. T. Huber

Letzte Aktualisierung: 25. November 2017

Dieser Kurs der Theoretischen Physik beschäftigt sich mit den grundlegenden mathematischen Strukturen, u.a. bekannt aus der Analysis und (linearen) Algebra, auf einem zur Physik zugänglichen Nivau, mit Fokus auf das tatsächliche Rechnen und Arbeiten anstelle von Beweisen.

Einzig für Lernzwecke und unabhängig von der Universität erstellt.

Diese Zusammenfassung eignet sich nur, wenn man die Themengebiete bereits verstanden und verinnerlicht hat.
Das Nutzen dieser Sammlung ersetzt keine Klausurvorbereitung.
Jeder hat eigene Schwächen.
Es ist dringend empfohlen, eigene Kompaktmerkzettel fokussiert auf diese Schwächen zu bauen.

1 Wichtiges aus der Schulmathematik

- **Natürliche Zahlen** hier $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$ liegt **dicht** in $\mathbb{R}$ – jedes $r \in \mathbb{R}$ beliebig genau rational annäherbar
- $\mathbb{R}$ ist **vollständig** (Supremum von nicht-leeren Teilmengen)
- **Potenzgesetze**: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:
  - ▷ $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
  - ▷ $a^b \div a^c = a^{b-c}$
  - ▷ $a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$
  - ▷ $a^c \div b^c = \left(\frac{a}{b}\right)^c$
  - ▷ $\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$
  - ▷ $\frac{1}{a^b} = a^{-b}$
  - ▷ $a^0 = 1$
- **Griechisches Alphabet**: $\mathrm{A}\alpha$ $\mathrm{B}\beta$ $\Gamma\gamma$ $\Delta\delta$ $\mathrm{E}\epsilon/\varepsilon$ $\mathrm{Z}\zeta$ $\mathrm{H}\eta$ $\Theta\theta/\vartheta$ $\mathrm{I}\iota$ $\mathrm{K}\kappa$ $\Lambda\lambda$ $\mathrm{M}\mu$ $\mathrm{N}\nu$ $\Xi\xi$ $\mathrm{O}o$ $\Pi\pi$ $\mathrm{P}\rho$ $\Sigma\sigma/\varsigma$ $\mathrm{T}\tau$ $\Upsilon\upsilon$ $\Phi\varphi/\phi$ $\mathrm{X}\chi$ $\Psi\psi$ $\Omega\omega$ (24 Buchstaben)
- **Binomialkoeffizient**: für $\alpha \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$: $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} = \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!}$
  Spezialfälle:
  - ▷ $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \binom{\alpha}{0} = 1$
  - ▷ $0! = 1 \quad \Rightarrow \quad \binom{0}{0} = 1$
  - ▷ Für $\alpha = n \in \mathbb{N},\ n \geq k$: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
  - ▷ Für $k, n \in \mathbb{N},\ n < k$: $\binom{n}{k} = 0$ (Faktor 0 im Zähler)
  - ▷ Für $n \in \mathbb{N}$: $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
  - ▷ Für $k, n \in \mathbb{N}$: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (vgl. Pascal'sches Dreieck)
- **Binomische Summe**: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
  Spezialfall $a = 1$: $(1+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k$
- **Gauß'sche Summenformel**: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- **Geometrische Summe**: $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
- **p-q-Formel**: $0 = x^2 + px + q \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
- Parabel: $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
  - ▷ $a_2 > 0$: nach oben geöffnet
  - ▷ $a_2 < 0$: nach unten geöffnet
  - ▷ $|a_2| > 1$: steiler als Normalp.
  - ▷ $|a_2| < 1$: flacher als Normalp.
  - ▷ Für Diskriminante in p-q-Formel $= 0$: **eine** Nullstelle
  - ▷ Diskr. < 0: **keine** Nullstelle
- **Kreisgleichung**: Kreis mit Radius R um den Ursprung: $x^2 + y^2 = R$
  - ▷ Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$
  - ▷ **Umrechnung** Grad–Radiant: $360° \mathrel{\widehat{=}} 2\pi \,\mathrm{rad}$
  - ▷ $\cos\varphi = \frac{x}{R}$, $\sin\varphi = \frac{y}{R}$
- **Trigonometrische Quadrate**: $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ ($\Leftarrow$ Einheitskreis)
- **Trigonometrische Additionstheoreme**:
  - ▷ $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2$
  - ▷ $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$
  - ▷ $\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi$, $\cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1$
- **Tangens**: $\tan\varphi := \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
- **Additionstheroem für den Tangens**: $\tan(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\tan\varphi_1 + \tan\varphi_2}{1 - \tan\varphi_1 \tan\varphi_2}$
- Tangens **divergiert** bei $k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$ mit k ungerade).
- **Periode**: Sinus und Kosinus sind periodisch mit 2π, Tangens mit π.
- **Symmetrie**: Sinus und Tangens sind *ungerade* Funktionen (punktsymmetrisch zum Ursprung): $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$, $\tan(-\varphi) = -\tan\varphi$, Kosinus ist *gerade* Funktion (achsensym. z. y-Achse): $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$
- **Wertetabelle** (Bogenmaß), auch verwendbar für arcsin, arccos, arctan:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	0
$\tan\varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0

2 Aussagenlogik, Mengenlehre

- $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge (\neg B)$
- Für **Mengen** ist $\cup, \cap$ kommutativ, assoziativ und distributiv.

3 Funktionen, Abbildungen

- Für $A: X \to Y$:
  - ▷ A **injektiv** $:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : A(x_1) = A(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
    $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow A(x_1) \neq A(x_2)$
  - ▷ A **surjektiv** $:\Leftrightarrow \forall y \in Y : \exists x \in X : A(x) = y$
  - ▷ A **bijektiv** $:\Leftrightarrow A$ injektiv $\wedge$ A surjektiv
    $\Leftrightarrow$ GLS $A(x) = y \quad \forall y \in Y$ eindeutig lösbar
- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, assoziativ, nicht kommutativ
- $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

4 Vollständige Induktion

- **V.I.:** I.A. $(n = n_0) \to$ I.V. *für* ein *n gelte...* $\to$ I.B. $\to$ Schritt $(n \curvearrowright n+1)$
- **Bernoulli-Ungleichung**: Für $x \in \mathbb{R},\ x \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$ gilt: $(1+x)^n \geq 1 + nx$

5 Komplexe Zahlen

- Allgemeine komplexe Zahl: $z = x + \mathrm{i} \cdot y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{i}^2 = -1$
  Realteil $\mathrm{Re}(z) = x$, **Imaginärteil** $\mathrm{Im}(z) = y$
- $\mathbb{C} = \left\{z \mid z = x + \mathrm{i}y,\ x, y \in \mathbb{R},\ \mathrm{i}^2 = -1\right\} \supset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\} = \mathbb{R}$
- Addition komponentenweise, Multiplikation per Distributivgesetz [ergibt $(x + \mathrm{i}y)(u + \mathrm{i}v) = (xu - yv) + \mathrm{i}(xv + yu)$] sind kommut., assoz., distr.
- Für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ ist $\overline{z} = z^* = x - \mathrm{i}y$ die **komplex konjugierte Zahl** zu z.
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{z}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{z}$
- Der **Betrag** $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist der Abstand zur 0. Es gilt $|z|^2 = z\overline{z}$.
- Es gilt $|z|^2 = \left|z^2\right|$, **aber** i.A. $|z|^2 \neq z^2$.
- Das **Argument** $\varphi = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ ist der Winkel zur positiven x-Achse.
  $\Rightarrow x = |z|\cos\varphi,\ y = |z|\sin\varphi$
- **Polardarstellung**: $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)$ mit $r = |z|$, $\varphi = \arg z$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w$
- **Formel von Moivre**: $(\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(n\varphi)$
  $\Rightarrow z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(n\varphi))$
- **Division/mulitplikatives Inverses**: $\frac{1}{z} = \frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$
  - ▷ $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$
  - ▷ $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$
  - ▷ $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{(\overline{w})}{(\overline{z})}$
  - ▷ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{(\overline{z})}$
  - ▷ $|z| = |\overline{z}|$
  - ▷ $\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$
- Jedes Polynom n-ten Grades hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen (können zusammenfallen) und lässt sich damit faktorisieren (**Fundamentalsatz d. Algebra**).
- **p-q-Formel** gilt für quadratische Gleichungen.
- Für $z^n = a$ mit $\arg a = \alpha$ gilt: $z_k = \sqrt[n]{|a|}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$

6 Vektorrechnung in $\mathbb{R}^n$

- **Kronecker-Symbol** $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$
  - ▷ $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ (symmetrisch)
- **Levi-Civita-Tensor** $\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } ijk = 123,\ 231 \text{ oder } 312 \\ -1 & \text{falls } ijk = 132,\ 213 \text{ oder } 321 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - ▷ $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}$ (vollst. antisymmetrisch)
- Standard-**Skalarprodukt** in $\mathbb{R}^n$: $\vec{a} \cdot \vec{b} := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$
  - ▷ $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \cos 0 = |a|^2$ (in $\mathbb{R}$)
  - ▷ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
    falls $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$
  - ▷ $\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| \left|\vec{b}\right|$
    (**Schwarz'sche Ungleichung**)
  - ▷ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (in $\mathbb{R}$)
    $\vec{a} \cdot \vec{b} = \overline{\left(\vec{b} \cdot \vec{a}\right)}$ in $\mathbb{C}$
  - ▷ $(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ (in $\mathbb{R}$)
    α konjugieren in $\mathbb{C}$
  - ▷ $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
  - ▷ **Dreiecksungleichung**:
    $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$
  - ▷ $\left|\vec{b}\right| = 1 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} =$ gerichtete Länge der orthogonalen Projektion von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$
  - ▷ $\vec{c} \perp \vec{a}$ $(\neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$
  - ▷ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum\limits_{i} a_i b_i = \sum\limits_{i,j} \delta_{ij} a_i b_j$
    (i, j laufen von 1 bis 3)

- **Kreuzprodukt** (nur!) für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$:
  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ (immer die nicht-Zeilenindizes)
  - $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$
  - $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (Rechte-Hand-Regel).
  - $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ = Fläche des von $\vec{a}, \vec{b}$ aufgesp. Parallelogramms
  - $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right|$
  - $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$ oder $\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \pi$ für $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$ (also parallel oder antiparallel) Insbesondere: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
  - $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (antisym.!)
  - $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$
  - $\vec{a}$, $\vec{b}$ lin. abh. $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \sum\limits_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k$ (i-te Komponente) (Antisym. von $\times \longrightarrow$ As. v. ϵ)
- **Spatprodukt** (nur!) für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ist $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$
  - Falls $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ Rechtssystem: Spatprodukt = Volumen des aufgespannten Parallelflachs
  - Spatp. $\geq 0 \Leftrightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ Rsys.
  - $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$ ($\cdot$, $\times$ vertauschbar)
  - $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lin. abh. $\Leftrightarrow$ Spatp. $= 0$
- $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \sum\limits_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$
- $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$
- **Einige Identitäten** bzgl. ϵ:
  $\sum\limits_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$
  $\sum\limits_{i,j} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijm} = 2\delta_{km}$
  $\sum\limits_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6$
- **Winkel** zwischen Vektoren: $\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}) = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$
- **Gerade/Ebene** von Parameterdarstellung auf **Koordinatendarstellung**, indem man das LGS aus den Komponentenzeilen löst.
- Koeffizienten der Koordinatendarstellung $\longrightarrow$ **Normalenvektor** $\vec{n}$. Auch ausrechenbar mit $\vec{n} = \vec{r} \times \vec{s}$ für die beiden Richtungsvektoren $\vec{r}, \vec{s}$.
- **Normal(en)form**: $[\vec{x} - \vec{x_0}] \cdot \vec{n} = 0$ mit $\vec{x_0}$ Ortsvektor eines Punktes Ist $\vec{n} = \vec{n_0}$ mit $|\vec{n_0}| = 1$ (auf 1 normiert): **Hesse-Normalform**
  - Hesse-NF für **Abstandsberechnung** $\mathrm{D}(\vec{y}) = |[\vec{y} - \vec{x_0}] \cdot \vec{n_0}|$
- **Schnittpunkt/-gerade**: Einsetzen der Parameterzeilen des einen Objekts in die Koordinatendarstellung des anderen Objektes, löse auf nach $\vec{x}$
- Alle **Linearkombinationen** $\mathrm{L}(\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}) = \left\{\vec{v} \;\middle|\; \vec{v} = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i \vec{x_i},\ \lambda_i \in \mathbb{R}\right\}$ für $x_i \in V$ (Vektorraum), es gilt $\mathrm{L} \subset V$ und L selbst Vektorraum
- $\left\{\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}\right\}$ **Basis** von V, falls alle lin. unabh. und $\mathrm{L}\left(\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}\right) = V$
  - dann ist $n =: \dim V$ **Dimension** von V
  - n kann auch ∞ sein (**Bsp.:** Ring der Polynome, Hilbert-Raum).
  - Basis immer gdw. $\dim V$-viele lin. unabh. Vektoren aus V
  - Jeder Vektor v lässt sich **eindeutig** als Lin.komb. von Basisvektoren aus B schreiben, die Koeff. heißen **Koordinaten** $[v]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B$
- **Orthonormalbasis (ONB)**: jeder b_i auf 1 normiert und alle zueinander senkrecht (**Bsp.:** Standardbasis von $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$)
  - Koordinatenentwicklung bei ONB: $\vec{x} = \sum_{i=1}^n (\vec{x} \cdot \vec{e_i}) \vec{e_i}$

7 LGS, Matrizen, Determinanten

- **homogen**: rechte Seite des LGS $= \vec{0}$, sonst inhomogen
  - homogen: immer mindestens eine Lösung (Triviallsg. $\vec{x} = \vec{0}$)
- $m \times n$-Matrix A: Tabellenform, Einträge $A_{i,j}$ ($1 \leq i \leq m$ Z., $1 \leq j \leq n$ Sp.)
  - $n = m$: **quadratische** Matrix
  - $n = 1$: **Spalte**nvektor, $m = 1$: **Zeile**nvektor
- **Transponierte**: A^T (Vertauschen Z./Sp.) mit $\left(A^\mathrm{T}\right)_{i,j} = A_{j,i}$
  - $A = A^\mathrm{T}$ heißt A ist **symmetrisch**
  - $A = -A^\mathrm{T}$ heißt A ist schief-/**antisymmetrisch**
- **Spur** einer $n \times n$-A: Summe der Diagonalen $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{i,i}$

- **Rang**: max. Anzahl lin. unabh. Z. bzw. Sp.
  - $n \times n$ und $\operatorname{rang} A = n \Rightarrow A$ **regulär**, $\operatorname{rang} A < n \Rightarrow A$ **singulär**
  - regulär = **invertierbar** (eindeutige A^{-1} mit $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}_{n \times n}$), A^{-1} berechnen durch $(A \mid \mathbb{1}_{n \times n})$ Gauß
  - Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
  - Falls $A^{-1} = A^\mathrm{T}$, heißt A **orthogonal**.
- **komplex konjug. Matrix** A^*: jeden Eintrag komplex konjugieren
- **Adjungierte** (Hermitesch-konjugierte) $A^\dagger = (A^*)^\mathrm{T} = \left(A^\mathrm{T}\right)^*$
  - Gilt $A = A^\dagger$, dann heißt A **selbstadjungiert** oder **hermitesch**.
  - Falls $A^{-1} = A^\dagger$, heißt A **unitär**.
- **Einheitsmatrix** $\mathbb{1}_{n \times n}$ mit $(\mathbb{1}_{n \times n})_{i,j} = \delta_{i,j}$
- **komponentenweise Addition** $A + B$, **Skalarmultiplikation** λA
- **Matrixmultiplikation** A ($m \times n$), B ($n \times p$): $(A \cdot B)_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j}$ Ergebnis ist $m \times p$. Assoziativ, distributiv, aber i.A. **nicht** kommutativ.
  - $(AB)^\mathrm{T} = B^\mathrm{T} A^\mathrm{T}$
  - $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
  - $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$
  - aber: $(AB)^* = A^* B^*$
  - $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
    i.A.: $\mathrm{Tr}(A_1 \cdots A_n) = \mathrm{Tr}(A_2 \cdots A_n A_1)$
  - Spur ist linear.
  - $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
  - $\left(A^\mathrm{T}\right)^\mathrm{T} = A$
  - $(A^*)^* = A$
  - $\left(A^\dagger\right)^\dagger = A$
  - $\left(A^{-1}\right)^\mathrm{T} = \left(A^\mathrm{T}\right)^{-1}$
- Jede $n \times n$ kann in symm. und antisymm. (bzgl. $^\mathrm{T}$) Anteil zerlegt werden: $A = A_\text{sym} + A_\text{anti}$ mit $A_\text{sym} = \frac{1}{2}\left(A + A^\mathrm{T}\right)$, $A_\text{anti} = \frac{1}{2}\left(A - A^\mathrm{T}\right)$
- **Determinante** $\det : \mathbb{C}^{n \times n} \to \mathbb{C}$ Soll folgende Eigenschaften haben:
  - $\det \mathbb{1}_{n \times n} = 1$
  - linear in jeder Spalte:
    $\det\left(\vec{s_1} \;\; \vec{s_2} \cdots \vec{s_{j-1}} \;\; \vec{s_j} + \vec{t_j} \;\; \vec{s_{j+1}} \cdots \vec{s_n}\right) = \det\left(\vec{s_1} \cdots \vec{s_n}\right) + \det\left(\vec{s_1} \cdots \vec{t_j} \cdots \vec{s_n}\right)$
    $\det\left(\vec{s_1} \;\; \vec{s_2} \cdots \vec{s_{j-1}} \;\; \lambda \vec{s_j} \;\; \vec{s_{j+1}} \cdots \vec{s_n}\right) = \lambda \det(\vec{s_1} \cdots \vec{s_n})$
  - asymmetrisch unter Vertauschung:
    $\det\left(\vec{s_1} \cdots \vec{s_j} \cdots \vec{s_k} \cdots \vec{s_n}\right) = -\det\left(\vec{s_1} \cdots \vec{s_k} \cdots \vec{s_j} \cdots \vec{s_n}\right)$

  Folgerungen und Eigenschaften:
  - $\vec{s_k} = \vec{s_j}$ mit $k \neq j \Rightarrow \det = 0$
  - $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
  - Addition von Vielfachem einer Spalte zu einer anderen: $\det$ gleich
  - $\det A = \det\left(A^\mathrm{T}\right) \Rightarrow$ alle Regeln für Zeilen auch für Spalten!
  - A regulär $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$ bzw. A singulär $\Leftrightarrow \det A = 0$
  - $\det(AB) = (\det A)(\det B)$
  - $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$ wenn A^{-1} existiert
- 2×2-Matrizen: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$
- 3×3-Matrizen: **Sarrus-Regel** (zuerst erste 2 Spalten nach r. kopieren):

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \\ - & - & - & & \end{array}$$

$\det = +a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + \ldots - a_{3,1} a_{2,2} a_{1,3} - \ldots$

- **Permutation** $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ bijektiv **Bsp.:** $1234 \xrightarrow{\pi} 4321$
  darstellbar durch Folge von **Transpositionen** (Vertauschen 2er Elemente) $\operatorname{sign} \pi = \pm 1$ ($+1$ wenn gerade Anzahl Transpos. für π, -1 w. ungerade)
- **Allgemeine Determinante** für $n \times n$-Matrix ($n!$ Terme!):
  $\det A = \sum\limits_{\text{alle } \pi : \{1, \ldots, n\}} \operatorname{sign}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}$
- **Determinanten-Entwicklungssatz**:
  $\det A = \sum\limits_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{j,k} D_{j,k} \overset{\text{oder}}{=} \sum\limits_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{k,j} D_{k,j}$
  mit $D_{jk} = \det$ der Matrix mit gelöschter j-ter Z. und k-ter Sp.
- **Lineare Abbildung** $f : V \longrightarrow W$ zwischen Vektorräumen, falls:
  $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ und $f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$

⋮

Ende der ersten Stoffhälfte. Fortsetzung im nächsten Dokument.