Lineare Algebra für Informatiker

Zusammenfassung wichtiger Elemente des Kurses

von Alexander Köster

Student der Universität Siegen, LAI 2017

Letzte Aktualisierung: 20. September 2017

Die lineare Algebra für Informatiker beschäftigt sich mit den Grundprinzipien der linearen Algebra, also Körper, lineare Abbildungen, Vektoren und Matrizen.

Der Kurs enthält einen Anfang mit grundlegenden universitätsmathematischen Begriffen und hat daher nur eine geringfügige Abhängigkeit von der DMI (eher Themenüberschneidungen mit der DMI als Abhängigkeiten).

Der Kurs entspricht der Vorlesung „Lineare Algebra I" für Mathematiker, beschäftigt sich mit einigen Themen allerdings weniger ausführlich.

Einzig für Lernzwecke erstellt.

Nicht geeignet als Klausurhilfe.
Das Erstellen einer eigenen Klausurhilfe führt zu einem besonders guten Lerneffekt.
Dieses Dokument sollte nur als Orientierung oder Vergleich dienen.
Jeder sollte seine Klausurhilfe individuell auf seinen Lernstand und seine eigenen Probleme anpassen, gut bekannte Dinge auslassen und schlecht merkbare Dinge hinzufügen.
Dieses Dokument beinhaltet viel mehr, als für eine tatsächliche Klausur durchschnittlich benötigt wird.
Für einen guten Ansatz, welche Inhalte man braucht, sollte sich an der Probeklausur orientiert werden.

1 Vorwissen, Notation

Kann aus DMI bereits bekannt sein, wenn man diesen Kurs bereits belegt hat.

1.1 Logik

- **Term**: Konstanten, Variablen, Funktionen
  Konvention: Kleinbuchstaben
- **Prädikate**: w oder f, anhängig von eingesetzten Werten Konvention: Großb. $P, Q, \ldots$
- **Aussage**: ohne Variablen oder mit jeder Variable gebunden mit Quantor $(\forall, \exists)$
- **Aussageform**: Aussage mit nicht gebundene Variablen

1.1.1 Schaltalgebra

Kann aus DRO bekannt sein, wenn man diesen Kurs bereits belegt hat.

- 0 oder 1
- $\neg a \mathrel{\widehat{=}} \overline{a}$ (Negation)
- $a \wedge b \mathrel{\widehat{=}} a \cdot b \mathrel{\widehat{=}} ab$ (Konjunktion)
- $a \vee b \mathrel{\widehat{=}} a + b$ (Disjunktion)
  - ▷ jede Schaltung aus diesen Teilen mgl.
- Kommutativ- und Assoziativgesetz gelten
- Distributivgesetze *zu beiden* Operationen
- Absorptionsgesetze:
  $a(a+b) = a \quad a + (ab) = a$
  $a(\overline{a}+b) = ab \quad a + (\overline{a}b) = a + b$
- DeMorgan'sche Regel:
  $\overline{ab} = \overline{a} + \overline{b} \quad \overline{a+b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$

1.2 Mengen

- Konvention: Großbuchstaben
- **Leere Menge** $\emptyset = \{\}$
- **Teilmenge**: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x: x \in A \to x \in B$
- **echte Teilm.**: $A \subsetneq B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge \neg(B \subseteq A)$
- **Gleichheit**: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- **Vereinigung**: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- **Durchschnitt**: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- **Mengendifferenz**: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- **Geordnetes Paar (Tupel)** (a,b) (auch für mehr als 2 Elemente: Tripel, n-Tupel) | $(a,b) \neq \{a,b\}$
- **Kreuzprodukt (kartesisches Produkt)**:
  $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

1.3 Funktionen (Abbildungen)

- **Identische Abbildung** $\mathrm{id}_X(x) = x \quad \forall x \in X$
- Eigenschaften einer Funktion $f: X \to Y$
  - ▷ **injektiv** (linkseindeutig):
    $\forall x, y: f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
    $\Leftrightarrow \forall x, y: x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
  - ▷ **surjektiv** (rechtstotal):
    $\forall y \in Y: \exists x \in X: f(x) = y$
  - ▷ **bijektiv** (1-zu-1): f injektiv $\wedge$ f surjektiv
- **Komposition**: $g \circ f$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- **Umkehrabbildung** zu f: $\quad f^{-1}: Y \to X$
  mit $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$
  - ▷ $\exists$ genau dann, wenn f bijektiv
- **Bild** $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ für $A \subseteq X$
- **Urbild** $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ für $B \in Y$

1.4 Summen

- $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
- Rechenregeln:
  - ▷ $c \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} c a_i$
  - ▷ $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$
  - ▷ $\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{n+k} a_{i-k}$
  - ▷ $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j)$

Hilfreiche Formeln:

- ▷ **Gauß'sche Summenformel**:
  $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$
- ▷ **Teleskopsumme**: Wenn $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Reihe:
  $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) = a_1 - a_{n+1}$

1.5 Anderes

- **Permutation** der Länge n: bijektive Funktion $\sigma: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ „Vertauschungen"
  - ▷ $n!$ Möglichkeiten für n Elemente
  - ▷ **Transposition** $\tau = \langle a, b \rangle$: tausche $a \leftrightarrow b$
  - ▷ Alle Permutationen Länge n bilden nicht-kommutative **„symmetr." Gruppe** S_n
  - ▷ **Signum**-Funktion: $\mathrm{sgn}: S_n \to \{-1, 1\}$
    mit $\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$
    $\forall \tau: \mathrm{sgn}(\tau) = -1$
  - ▷ **Fehlstand**: $a < b$, aber $\sigma(a) > \sigma(b)$
  - ▷ $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{|\text{Fehlstände}(\sigma)|}$
  - ▷ $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{|\text{erzeugende } \tau \text{ von } \sigma|}$
- **Sinus**-Funktion: $\sin 0 = 0$,
  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathrel{\widehat{=}} \sin(90°) = 1$
  $\sin \pi \mathrel{\widehat{=}} \sin(180°) = 0$
  $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \mathrel{\widehat{=}} \sin(270°) = -1$
- **Kosinus**-Funktion: $\cos 0 = 1, \ldots$
- $\arccos(s) = \alpha$: Umkehrfunktion des $\cos(\alpha)$
- Beweisverfahren für mehrere äquivalente Aussagen: **Ringschluss**
  $(A \Rightarrow B \Rightarrow \cdots \Rightarrow Z \Rightarrow A) \to (A \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow Z)$

2 Grundlagen

2.1 Gleichungen

- Gleichung: Aussageform $t_1 = t_2$ (t_i Terme)
- **Lösung**: Belegung der Variablen, sodass die Aussage wahr ist (abh. von Zahlenbereich)

2.2 Zahlenbereiche

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ in diesem Kurs
  - ▷ $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ wie aus der Schule bekannt
- $\mathbb{C}$: siehe 2.4
- $\mathbb{Z}_n$: Alle Zahlen von 0 bis $n-1$ („$\mathbb{Z} \mod n$")

2.3 Körper

- Tripel $(K, +_K, \cdot_K)$ mit Menge K
- Folgende Axiome müssen $\forall x, y, z$ gelten:
  Bezüglich **Addition** $+_K$:
  - ▷ Abgeschlossenheit auf K
  - ▷ Assoziativgesetz
  - ▷ $\exists$ neutrales Element 0_K
  - ▷ $\exists$ inverse El. $-x$ mit $x +_K (-x) = 0_K$
  - ▷ Kommutativitgesetz

  Bezüglich **Multiplikation** $\cdot_K$:
  - ▷ Abgeschlossenheit auf K
  - ▷ Assoziativität
  - ▷ $\exists$ neutrales Element 1_K (muss $1_K \neq 0_K$)
  - ▷ $\exists$ inverse Elemente x^{-1} (außer für 0_K) sodass $x \cdot x^{-1} = 1_K$
  - ▷ Kommutativgesetz

  und das typische Distributivgesetz:
  $x \cdot_K (y +_K z) = (x \cdot_K y) +_K (x \cdot_K z)$
- Es gibt genau ein einziges 1_K, 0_K und genau ein additives und multiplikatives Inverses zu jedem Element.
- **Bsp.:** $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ mit normalem $+, \cdot$ sind Körper
- $\mathbb{Z}_p$ mit $p \in$ Primzahlen mit $+_p$, $\cdot_p$ (Operationen $\mod p$) ist Körper, genannt $\mathbb{F}_p$
- **Konvention:** $a + a + \cdots + a = na$ und $a \cdot a \cdots a = a^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ *(unabhängig v. K!)*
- Für Körper K gilt $\forall a, b, c \in K$:
  - ▷ $a \cdot 0 = 0$
  - ▷ $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$
  - ▷ $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
  - ▷ $a(-b) = -(ab)$ und $(-a)(-b) = ab$
  - ▷ $a \neq 0 \wedge a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$

2.4 Komplexe Zahlen

- Körper $\mathbb{C} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}})$
  - ▷ $+_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
    mit $(a,b) +_{\mathbb{C}} (c,d) = (a+c, b+d)$
  - ▷ $\cdot_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
    mit $(a,b) \cdot_{\mathbb{C}} (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$
  - ▷ $0_{\mathbb{C}} = (0,0)$ und $1_{\mathbb{C}} = (1,0)$
  - ▷ **Konvention:** $(a,b)_{\mathbb{C}} = a + bi$ mit $i^2 = -1$
    Man kann damit wie in $\mathbb{R}$ rechnen. *Außer:*
    $\to {}^1/_i = -i$
    $\to (a+bi)^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$ für $a + bi \neq 0$
- **Realteil**: $\Re(x) = a$ für $x = a + bi$
- **Imaginärteil**: $\Im(x) = b$ für $x = a + bi$
- **konjugiert komplexe Zahl**:
  $\overline{x} = a - bi$ für $x = a + bi$
  $\forall x, y \in \mathbb{C}$ gilt bzgl. konjugiert kompl. Zahlen:
  - ▷ $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$
  - ▷ $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
  - ▷ $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \overline{x}$
- **Absolutbetrag**:
  $|x| = \sqrt{x\overline{x}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ für $x = a + bi$
  $\forall x, y \in \mathbb{C}$:
  - ▷ $|x + y| \leq |x| + |y|$
  - ▷ $|xy| = |x||y|$

2.5 Lineare Gleichungen

- In einem Körper K mit $a, b, c \in K$ und $a \neq 0$ haben die Gleichungen $ax = b$ bzw. $ax + c = 0$ genau eine Lösung.
- Mehrere Gleichungen: siehe 4

3 Ring

- Tripel $(R, +, \cdot)$ mit Menge R Folgende Axiome müssen $\forall x, y, z \in R$ gelten:
  Bezüglich Addition $+$:
  - ▷ Assoziativgesetz
  - ▷ $\exists$ neutrales Element 0_R
  - ▷ $\exists$ inverse Elemente $-x$ mit $x + (-x) = 0_R$
  - ▷ Kommutativgesetz

  Bezüglich Multiplikation $\cdot$:
  - ▷ Assoziativgesetz
  - ▷ $\exists$ neutrales Element 1_R (muss $1_R \neq 0_R$)

  und das Distributivgesetz (nicht kommutativ!):
  - ▷ $x(y + z) = xy + xz$
  - ▷ $(y + z) = yx + zx$
- Gilt für Multiplikation das Kommutativgesetz, heißt es „kommutativer Ring".
- Man kann in einem Ring nicht beliebig kürzen ($ab = ac \not\Rightarrow b = c$ für $a \neq 0$), außer es gilt: $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$, dann gilt der Ring als **„nullteilerfrei"** und man kann kürzen.

3.1 Polynome

- **Polynom** mit Koeffizienten in einem Ring R ist ein Ausdruck $f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ mit $a_i \in R$.
- $R[X]$ = **Menge aller Polynome** über R
  $\Rightarrow$ **„Polynomring"** $(R[X], +, \cdot)$.

  Sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ und $g = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$.
  - ▷ Addition: $f + g = \sum_{i=0}^{\max\{n,m\}} a_i b_i X^i$ (Koeffizienten addieren)
  - ▷ Multiplikation: $fg = \sum_{i=0}^{n+m} c_i X^i$ mit

$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$
Bsp.: $c_0 = a_0 b_0$,
$c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$,
$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$,
$c_3 = a_3 b_0 + a_2 b_1 + \dots$
(Ausmultiplizieren funktioniert auch)

- **Nullpolynom**: $\forall a_i : a_i = 0$
- **Grad** eines Polynoms f: Höchster Exponent
$$\deg f = \begin{cases} -\infty & \text{falls } f = 0 \\ \max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\} & \text{sonst} \end{cases}$$
  - ▷ Wenn R nullteilerfrei: $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$
  - ▷ $-\infty + n = m + (-\infty) = -\infty - \infty = -\infty$
  - ▷ $\deg(f+g) \leq \deg f, \deg g$
- Einsetzen von $\lambda \in R$ in $f \in R[X]$: $f(\lambda) \in R$
  - ▷ induzierte Abbildung von f: $\tilde{f} : R \to R,\ \lambda \mapsto f(\lambda)$
- In Polynomringen *über Körpern* kann man mit Rest dividieren: **Polynomdivision**
$\Rightarrow f(X) = q(X) \cdot g(X) + r(X)$
$f(X) \operatorname{div} g(X) = q(X);\quad f(X) \mod g(X) = r(X)$
geht wie schriftliche Division (Grundschule)
  - ▷ Funktioniert auch in *nullteilerfreien Ringen*, mit normierten Polynomen (höchstes $a_k = 1$, **Bsp.:** wie in pq-Formel)
- **Nullstellen**: λ_0 mit $f(\lambda_0) = 0$
In einem nullteilerfreiem Ring R gilt für jedes $f(X) \in R[X]$:
  - ▷ f hat maximal $\deg f$ Nullstellen.
  - ▷ f mit $\deg f > 0$ hat mindestens eine Nullstelle (liegt nicht zwingend im Ring).
  - ▷ Sei λ_0 eine Nullstelle von f.
$\exists$ eindeutiges $g \in R[X]$ mit $f = (X - \lambda_0) g$ und $\deg g = \deg f - 1$
  - ▷ Sei $R[X] \subseteq \mathbb{C}[X]$. Ist λ_0 eine Nullstelle, so ist $\overline{\lambda_0}$ auch eine Nullstelle.
  - ▷ Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ mit $\deg f$ ungerade besitzt eine reelle Nullstelle.
- Jedes $f \in \mathbb{C}[X]$ zerfällt in **Linearfaktoren**. D.h., $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $n = \deg f$: $f = a(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\dots(X - \lambda_n)$

4 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

4.1 LGS allgemein

- **Lineare Gleichung** über Ring R: Gleichung der Form $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$ mit $a_1 \dots a_n, b \in R$
  - ▷ **homogene** LG: $b = 0$
  - ▷ **LGS**: endlich viele LG
  - ▷ Lösung eines LGS: $x_1 = \lambda_1; \dots; x_n = \lambda_n$ sodass alle LG des LGS erfüllt sind
- **elementare Zeilenumformungen**:
  - ▷ Vertauschen von zwei Gleichungen
  - ▷ Multiplizieren einer Gleichung mit einer Konstanten (Element des Rings)
  - ▷ Addieren einer Gleichung zu einer anderen Gleichung

  Erzeugt in einem *nullteilerfreien* Ring ein neues LGS mit gleicher Lösung. *Achtung: Die LGS selbst gelten nicht als gleich* (nutze $\rightsquigarrow$ statt $=$)!
  - ▷ In Ringen wie $\mathbb{Z}_n$: für elementare Umformungen muss man darauf achten, mit den additiven Inversen zu addieren statt subtrahieren/mit den multiplikativen Inversen zu multiplizieren statt dividieren.
- Matrixschreibweise: $Ax = b$ oder $(A|b)$
- Sind x, y Lösungen eines homogenen LGS und $k \in K \Rightarrow x + y$ und kx auch Lösungen
- Ist z eine f.a.b. Lösung des LGS $Ax = b$ und y eine Lösung des homogenen LGS $Ax = 0$, so ist $z + y$ ist Lösung des inhomogenen LGS.
  - ▷ Eine Lösung des inhomogenen und eine des homogenen zu kennen reicht, um *alle* Lösungen des inhomogenen zu finden
- Ist A invertierbar, hat $Ax = b$ genau 1 Lösung ($x = A^{-1} b$) und $Ax = 0$ nur $x = 0$ (s. 4.3).
  - ▷ findet man auch mit $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det A}$ (s. 7) mit A_i = Matrix A, wo die i-te Spalte durch b ersetzt wurde (i ist die Zeile im Vektor x) (**Cramer'sche Regel**)

4.2 Gauß'sches Eliminationsverfahren

Umformen in Zeilenstufenform (treppenförmig von links nach rechts immer mehr Nullen)

- Erweitertes Gauß-Verfahren: Umwandeln in eine Einheitsmatrix (s. 4.3) auf der linken Seite

4.3 Matrizen

- $M(m \times n, K)$: **Menge aller Matrizen** mit m Zeilen, n Spalten und Elementen aus Körper K
- Matrix $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M(m \times n, K)$
- **Nullmatrix** $0_{m \times n}$: hat nur Nullen als Einträge.
- **Addition**: komponentenweise addieren $\left(a_{i,j}\right) + \left(b_{i,j}\right) = \left(a_{i,j} + b_{i,j}\right)$
  - ▷ kommutativ, assoziativ
  - ▷ Neutralelement: $0_{m \times n}$
  - ▷ Inverses: $-A$

  $\Rightarrow (M(m \times n, K), +)$ ist eine Gruppe.
- **Skalarmultiplikation**: alle Komponenten mit Konstante mult. | $k \cdot \left(a_{i,j}\right) = \left(k a_{i,j}\right)$ mit $k \in K$ (Skalar steht *immer* links!)
  - ▷ Distributivgesetz: $k(A + B) = kA + kB$
  - ▷ nullteilerfrei
- **quadratische Matrix**: gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten ($M(n \times n, K)$)
- **Einheitsmatrix** $I_n = \left(a_{i,j}\right) \in M(n \times n, K)$ mit $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$ **Bsp.:** $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
(Einsen auf der Diagonalen, sonst Nullen)
  - ▷ Ist A eine $n \times n$-Matrix: $A I_n = A = I_n A$
- **Produkt** $\left(a_{i,j}\right)\left(b_{i,j}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right)$
wenn Größe der beiden Matrizen gleich ist.
Dazu: **Falk-Schema**

	$A \cdot B$	2 3 1	1 7 0
Bsp.:	$4 \quad 2 \quad 0$	$4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = \mathbf{14}$	$4 \cdot 1 + 2 \cdot 7 + 0 \cdot 0 = \mathbf{18}$
	$-1 \quad 3 \quad 5$	$(-1) \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = \mathbf{12}$	$(-1) \cdot 1 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 0 = \mathbf{20}$

  - ▷ assoziativ
  - ▷ Neutralelement I_n falls quadratisch
  - ▷ Distributivgesetz: $A(B + C) = AB + AC$
  - ▷ $A(aB) = a(AB) = (aA)B$
  - ▷ *nicht* kommutativ!
  - ▷ *nicht* zwingend nullteilerfrei (man darf *nicht* kürzen)
    - – Ausnahme: Matrix hat linear unabhängige Spalten (s. 5)

  $\Rightarrow (M(n \times m, K), +, \text{Matrixmult.})$ ist ein Ring
- **Transponieren**: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
  - ▷ $\left(A^t\right)^t = A$ ▷ $(A + B)^t = A^t + B^t$
  - ▷ $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ (Reihenfolge!)
- **elementare Zeilenumformungen** dargestellt durch **Elementarmatrizen**:
  - ▷ $E_{i,\,j} \cdot A$: Tausch der i-ten und j-ten Zeile
Bsp.: $3 \times 3: E_{1,\,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - ▷ $F_{i,\,k} \cdot A$: i-te Zeile mit k multiplizieren
Bsp.: $3 \times 3: F_{3,\,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
  - ▷ $G_{k,\,i,\,j} \cdot A$: Additon des k-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile
Bsp.: $3 \times 3: G_{4,\,1,\,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Es gilt:
  - ▷ Elementarmatrizen sind invertierbar.
- Eine $n \times n$-Matrix A ist **invertierbar**, wenn $\exists A^{-1}$ mit $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ sowie auch:
  - ▷ wenn $\varphi_A : K^n \to K^n$ bijektiv
  - ▷ wenn man A als Produkt von Elementarmatrizen schreiben kann ($D_n \cdots D_1 \cdot I_n$)
  - ▷ wenn $\operatorname{rang}(A) = n$ (Anzahl Zeilen)
  - ▷ wenn Spalten von A linear unabhängig
  - ▷ wenn $\operatorname{Ke}(\varphi_A) = \{0\}$ ($Ax = 0$ nur trivial)
  - ▷ wenn $\det A \neq 0$ (siehe 7)

  Es gilt:
  - ▷ Matrixinverse sind immer eindeutig.
  - ▷ $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
  - ▷ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ (Reihenfolge!)

  „Kochrezept" für **Matrixinverse** zu A: Schreibe $(A \mid I_n)$ (Matrizen ausschreiben, analog LGS). Wandle A-Seite in I_n um (erw. Gauß, s. 4.2). Die rechte Seite ist dann A^{-1}.
- **Adjungierte Matrix** $\operatorname{adj}(A)$: Matrix mit Einträgen $a_{i,j} = (-1)^{i+j} \det\left(A_{i,j}\right)$ („Cofaktoren")
  - ▷ $A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$ wenn $\det A \neq 0$
  - ▷ eher theoretischer als prakt. Nutzen

5 Vektorräume

- K-**Vektorraum**: $(V, +, \cdot)$
mit $+ : V \times V \to V$ (Addition)
und $\cdot : K \times V \to V$ (Skalarmultiplikation)
Es muss gelten $\forall u, v \in V;\ k, h \in K$:
  - ▷ $(V, +)$ kommutative Gruppe
    - – Neutralel.: Nullvektor 0 (eindeutig)
    - – Inverses zu u ist $-u$ (eindeutig)

  bzgl. Skalarmultiplikation:
  - ▷ distributiv: $(k + h)u = ku + hu$ sowie $k(u + v) = ku + kv$
  - ▷ assoziativ: $(kh)u = k(hu)$
  - ▷ neutrales Element: Skalar 1_K
- **Vektor** $\in$ Vektorraum
  - ▷ **reelle Vektorräume**: Vektorräume über $\mathbb{R}$
  - ▷ **komplexe Vektorräume**: Vr. über $\mathbb{C}$
- **Bsp.:** einige typische Vektorräume:
  - ▷ Jeder Körper K ist ein K-Vektorraum mit der Körper-Addition und -Multiplikation
  - ▷ Jeder Körper K mit Unterkörper K' ist K'-Vektorraum (**Bsp.:** $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$-Vektorr.)
  - ▷ $M(m \times n, K)$ ist K-Vektorraum mit Addition und Skalarmultiplikation (s. 4.3)
  - ▷ K^n: Menge aller n-Tupel ist K-Vektorraum (**Bsp.:** bekannte Vr. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$)
mit Add. $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ und Skalarmultiplikation $k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$
  - ▷ K^∞: Menge aller unendlichen Tupel ist K-Vektorraum (analog K^n)
  - ▷ K^X: Menge aller Funktionen $f : X \to K$ mit Add. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und Skalarmultiplikation $(kf)(x) = k(f(x))$
    - – Also: $K^n = K^{\{1,2,\dots,n\}}$, $K^\infty = K^{\mathbb{N}}$
  - ▷ Menge aller Lösungen eines homogenen LGS über einem Körper ist Vektorraum
- **Linearkombination** der Vektoren $v_1, \dots, v_2$: $k_1 v_1 + \dots + k_n v_n$ mit Skalaren $k_1, \dots, k_2$
  - ▷ Vektor v ist **Linearkombination von Menge** $S \subseteq V$, wenn $v_1, \dots, v_n \in S$ (n endl.)
- $v_1, \dots, v_n \in V$ sind **linear unabhängig**, wenn $k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = 0 \Rightarrow k_1 = \dots = k_n = 0$
  - ▷ $k_1, \dots, k_n$ eindeutig

- ▷ Ein Paar Vektoren linear unabhängig = Vektoren keine Vielfache voneinander
- ▷ **linear abhängig** ⇔ ¬ linear unabhängig
- ▷ Menge $S \subseteq V$ linear unabhängig, wenn alle mgl. endl. Auswahlen von Vektoren in S linear unabhängig sind

In jedem K-Vektorraum V gilt:

- ▷ einzelner Vektor v lin. unabh., wenn $v \neq 0$
- ▷ $0 \in \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow v_1, \dots, v_n$ linear abh.
- ▷ Vektor ist zweimal in Menge ⇒ lin. abh.

- $\langle S \rangle$: **Menge aller Linearkombinationen**
  Wenn $S = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow \langle S \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$
  - ▷ $\forall B, B' \subseteq V: \langle B' \rangle \subseteq \langle B \rangle \Leftrightarrow B' \subseteq \langle B \rangle$
  - ▷ Ist S eine Menge von Vektoren eines K-Vektorraums, ist $\langle S \rangle$ ein K-Vektorraum.
- $V = \langle S \rangle \Rightarrow S$ ist **Erzeugendensystem** von V
  - ▷ S ist **Basis** v. V, wenn außerd. lin. unabh.
  - ▷ **Standardbasis** von K^n: **Einheitsvektoren** $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $e_n = (0,\dots,0,1)$
  - ▷ B ist Basis ⇔ B ist max. lin. unabh. Menge ⇔ B ist min. Erzeugendensystem
  - ▷ Jeder nicht-trivial endlich erzeugte Vektorraum hat endliche Basis
    - – Banach-Tarski-Paradoxon als Folge: 3D-Kugel $\to \cdots \to 2\times$ gleiche Kugel
  - ▷ Es gibt nicht mehr linear unabhängige Vektoren als in einer Basis.
  - ▷ **Austauschlemma**: Man kann jeden Vektor einer Basis mit einer Linearkombination der Basis austauschen, solange der ersetzte Vektor mit Skalar $\neq 0$ vorkam.
  - ▷ **Austauschsatz von Steinitz**:
    $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis,
    $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ lin. unabh. Vektoren $\Rightarrow m \leq n \wedge \exists m$ Vektoren in B, die wir durch C ersetzen können
  - ▷ Zwei Basen haben gleich viele Elemente.
  - ▷ Basen beachten (im Gegensatz zu Mengen) die Reihenfolge der Elemente!
- Linearkombination als Matrix darstellen: Sei A die Matrix mit Vektoren $v_1, \dots, v_n$ als Spalten, $k_1, \dots, k_n$ Skalare: $k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n = Ak$
  - ▷ $v_1, \dots, v_n$ lin. unabh. ⇔ homogenes LGS $Ax = 0$ hat nur triviale Lösung $x = 0$
  - ▷ Sei $b \in K^n$. Es gilt $b \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \Leftrightarrow Ax = b$ lösbar (mindestens eine Lösung)
- **Dimension** eines Vektorraums $\dim_K V$: Anzahl der Basisvektoren
  - ▷ $\dim \{0\} = 0$
  - ▷ Eine Menge mit $\dim V$ vielen lin. unabh. Vektoren aus V ist eine Basis von V.
  - ▷ Ein Erzeugendensystem mit $\dim V$ vielen Vektoren aus V ist eine Basis von V.
  - ▷ $\dim K^n$ ist immer n.
- Jeden Vektor $w \in V$ kann man als Linearkombination einer zugehörigen Basis B darstellen. Die Skalare davon nennt man **Koordinaten**: $(w)_B = (k_1, \dots, k_n)$
  - ▷ $u, v \in V$; $k \in K$; B Basis von V
    $(v+u)_B = (v)_B + (u)_B$, $\quad (kv)_B = k(v)_B$
  - ▷ Zum Herausfinden von Koordinaten von w: LGS mit den Basisvektoren $= w$
- U ist **Unter(vektor)raum**, wenn V Vektorraum und $U \subseteq V$ mit gleichen $+, \cdot$ auch Vektorraum
  - ▷ man muss nur zeigen, dass U unter $+, \cdot$ abgeschlossen ist, Axiome vererben sich
  - ▷ Seien U_1, U_2 Unterräume von V
    $\Rightarrow U_1 \cap U_2$ auch Unterraum von V
    (gilt im Allgemeinen *nicht* für $U_1 \cup U_2$)
  - ▷ Jeder Unterraum muss den Nullvektor enthalten (laut Def.).

Bsp.: einige Unterraum-Assoziationen:

- ▷ Menge aller stetigen (differenzierbaren) Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ ist Unterraum der Menge aller Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$
- ▷ Ursprungsgeraden sind Unterräume v. $\mathbb{R}^2$
- ▷ Basis eines Unterraums U von V kann zu einer Basis von V ergänzt werden.
- ▷ U_2 ist **Komplement** von U_1, wenn sie nur den Vektor 0 gemeinsam haben und zusammen V erzeugen, also $\langle U_1 \cup U_2 \rangle = U_1 \oplus U_2 = V$ („direkte Summe").
  - – Jeder Unterraum hat Komplement
  - – $\forall v \in V: \exists$ eind. $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ (kompl. Unterräume): $v = u_1 + u_2$

- **Dimensionssatz** für Unterräume:
  $\dim \langle U_1 \cup U_2 \rangle = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim (U_1 \cap U_2)$

6 Lineare Abbildungen

- Funktion φ zwischen Vektorräumen $V \to W$ heißt **lineare Abbildung**, wenn gilt:
  - ▷ $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$
  - ▷ $\varphi(ku) = k\varphi(u)$

  Bsp.:
  - ▷ $\mathrm{id}_V : V \to V$ ist immer linear.
  - ▷ $\forall k \in K$ ist $\varphi : V \to W$, $v \mapsto kv$ linear.
  - ▷ Ist $V = U_1 \oplus U_2$, ist Projektion P_{U_1} : $V \to U_1$, $v \mapsto u_1$ mit $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ und $v = u_1 + u_2$ linear.
  - ▷ K^n sei als Vektorraum der $n \times 1$-Matrizen aufzufassen, dann ist $\forall$ $m \times n$-Matrizen $\varphi_A : K^n \to K^m$, $v \mapsto Av$ linear.
- Für lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ gilt:
  (analog generell in der DMI, s.a. 1.3)
  Bild: $\mathrm{Bi}(\varphi) = \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\}$
  - ▷ Unterraum von W
  - ▷ φ **surjektiv** ⇔ $\dim \mathrm{Bi}(\varphi) = \dim W_{\text{Ziel}}$
  - ▷ $\mathrm{Bi}(\varphi_A) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ wobei $a_1, \dots, a_n$ die Spalten von A sind (Basis finden mit Gauß von A^t)

  Kern: $\mathrm{Ke}(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$ (Nullstellen)
  - ▷ Unterraum von V
  - ▷ φ **injektiv** ⇔ $\mathrm{Ke}(\varphi) = \{0\}$
  - ▷ $\mathrm{Ke}(\varphi_A) = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$ (LGS)
- Sind $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to U$ lineare Abbildungen, so ist auch $\varphi \circ \psi : V \to U$ linear.
- Bijektive lin. Abbildung zwischen Vektorräumen heißt **Isomorphismus**. Die betroffenen Vektorräume heißen dann **isomorph** („identisch bis auf die Benennung der Elemente").
  - ▷ Zwei K-Vektorräume der gleichen Dimension sind immer isomorph.
- Eine lineare Abbildung wird eindeutig durch ihr Verhalten auf allen Basisvektoren definiert.
- Sei $\varphi : V \to W$ lin. A., $v_1, \dots, v_n$ Basis von V.
  - ▷ $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ lin. abh. ⇔ φ injektiv.
  - ▷ $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ Erzeugendensystem von W ⇔ φ surjektiv.
  - ▷ $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ Basis von W ⇔ φ bijektiv (Isomorphismus).
- **Darstellungsmatrix** $M(\varphi, B, C)$ mit $\varphi : V \to W$ lin. A., B Basis v. V, C Basis v. W: Bild jedes B-Vektors kann man ausdrücken als Linearkombination der C-Vektoren. Koeffizienten der Lin.komb. des j-ten B-Vektors bilden die j-te *Spalte* der Darstellungsmatrix.

Bsp.: $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$

$B = (e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

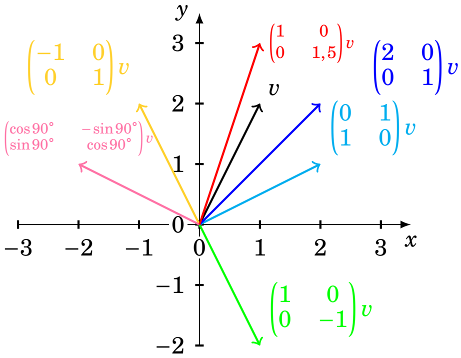
$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M(\varphi, B, C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- ▷ $(\varphi(v))_C = M(\varphi, B, C)(v)_B$
- ▷ Für $\varphi : V \to W$, $\psi : W \to U$ lin. A. mit U, V, W endl. mit jeweils Basen B, C, D gilt: $M(\psi \circ \varphi, B, D) = M(\varphi, B, C)\, M(\psi, C, D)$

- **Umkehrabbildung** φ^{-1} ist lineare Abbildung, falls φ isomorph (bijektive lin. A.)
  - ▷ Berechnet durch: $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$ (s. 4.3)
- **Basistransformationsmatrix** $M(\mathrm{id}, B, C)$ für verschiedene Basen B und C des gleichen endl.-dim. Vektorraums V: Erlaubt das Wechseln zwischen zwei Koordinatendarstellungen $(v)_C = M(\mathrm{id}, B, C)(v)_B$ (immer invertierbar). Wird analog Darstellungsmatrix berechnet.
- Sei $\varphi : V \to W$ lin. A. zw. endl.-dim. Vektorräumen, B, B' Basen von V, C, C' Basen von W, $A = M(\varphi, B, C)$ und $A' = M(\varphi, B', C')$, $S = M(\mathrm{id}, C', C)$ und $T = M(\mathrm{id}, B, B')$. Dann gilt: $A = SA'T$
- **Dimensionssatz** für lin. Abb. $\varphi : V \to W$: $\dim V = \dim \mathrm{Bi}(\varphi) + \dim \mathrm{Ke}(\varphi)$
- Ist $\varphi : V \to W$ mit $\dim V = \dim W < \infty$, so ist φ entweder bijektiv oder weder surjektiv noch injektiv.
- **Rang** der Matrix A: $\mathrm{rang}(A) = \dim \mathrm{Bi}(\varphi_A)$
  - ▷ Anzahl nicht-Nullzeilen in Zeilenstufenform der Matrix (Gauß)
  - ▷ $A = TBS \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$
  - ▷ Wenn $\varphi : V \to W$ mit V, W endl.-dim., ist Rang aller Darstellungsmatrizen gleich.

Geometrie von lin. A. in $\mathbb{R}^2$



- **Geometrie** von lin. A. in $\mathbb{R}^3$:
  - ▷ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$: Rotation um x-Achse
  - ▷ $\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$: Rotation um y-Achse
  - ▷ $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: Rotation um z-Achse
  - ▷ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: Spiegelung an xy-Ebene
  - ▷ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: Spiegelung an xz-Ebene
  - ▷ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: Spiegelung an yz-Ebene

7 Determinanten

- **Determinante** einer $n \times n$-Matrix A:
$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$
(nur Def. (Leibniz), umständliche Darstellung)
- 2×2-Matrizen: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$
- 3×3-Matrizen: **Sarrus-Regel** – zum Merken: Zuerst erste 2 Spalten nach rechts kopieren.
$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \\ - & - & - & & \end{array}$$
$\det = +a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + \ldots - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - \ldots$
- Matrizen mit 0 unter-/oberhalb Diagonalen:
$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$
nur Diagonalkomponenten multiplizieren
  - ▷ $\det(I_n) = 1$
- **Rechenregeln** mit Determinanten:
  - ▷ Ist A' wie A mit zwei Zeilen vertauscht, so ist $\det A' = -\det A$ (pro Tausch $\cdot(-1)$).
  - ▷ Hat A zwei gleiche Zeilen, ist $\det A = 0$.
  - ▷ Ist A' wie A mit einer Zeile multipliziert mit k, so ist $\det A' = k \det A$.
    - Für Matrix A mit n Zeilen und Körperelement k: $\det(kA) = k^n \cdot \det A$
  - ▷ $\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$
  - ▷ Ist A' wie A mit einer Zeile zu einer anderen dazuaddiert, ist $\det A = \det A'$.
  - ▷ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
  - ▷ $\det\left(A^{-1}\right) = \det(A)^{-1}$
  - ▷ $\det A = \det\left(A^t\right)$
  $\Rightarrow$ **Alle Sätze für Determinanten gelten auch für Spalten statt Zeilen.**

  Eigenschaften 3 und 4 zusammen nennt man auch „lineare Abbildung in jeder Zeile“.
- $\det A = 0$, wenn Zeilen von A linear abhängig.
- **Laplace-Entwicklung nach einer Zeile/Spalte**: Bei großen Matrizen kann man det zum Berechnen aufteilen.
$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(A_{i,j}\right)$
wobei $A_{i,j}$ = Matrix mit Löschen der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A.
(+ oder – kann man sich merken mit Schachbrettmuster: $a_{1,1} \mapsto +, a_{1,2} \mapsto -, \ldots$)

8 Eigenwerte & Eigenvektoren

- $k \in K$ ist **Eigenwert** von $\varphi : V \to W$, wenn $\exists v \neq 0 : \varphi(v) = kv$.
- $v \in V \setminus \{0\}$ ist **Eigenvektor** von φ zum Eigenwert k, wenn $\varphi(v) = kv$.
- „Eigenwert/-vektor einer Matrix A“ bedeutet Eigenwert/-vektor von φ_A.
- Einige Allgemeinheiten:
  - ▷ Einheitsmatrix hat Eigenwert 1 und jeder nicht-triviale Vektor ist Eigenvektor.
  - ▷ Nullmatrix hat Eigenwert 0 und jeder nicht-triviale Vektor ist Eigenvektor.
  - ▷ Ist $\operatorname{Ke}(\varphi) \neq \{0\}$, so ist 0 Eigenwert.
  - ▷ Ist A Diagonalmatrix (alles 0 außer Diagonalen $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$), hat A die Eigenvektoren $e_1, \ldots, e_n$ zu je den Eigenwerten $a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}$.
- Nicht jede lineare Abbildung hat Eigenwerte (**Bsp.:** Rotation in $\mathbb{R}^2$ um $\alpha < 180°$).
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.
- $\varphi : V \to V$ heißt **diagonalisierbar**, falls V eine Basis aus Eigenvektoren von φ besitzt.
  - ▷ Sei B diese Basis. $M(\varphi, B, B)$ ist dann eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen.
  - ▷ Matrix A diagonalisierbar $\Leftrightarrow \exists$ invertierbare Matrix S : $S^{-1}AS$ Diagonalmatrix.
  - ▷ Hat eine $n \times n$-Matrix n verschiedene Eigenwerte, ist sie diagonalisierbar.
- Eigenvektor zu bekanntem Eigenwert k berechnet man durch Lösen des LGS $(A - kI_n)x = 0$
- Ist A eine $n \times n$-Matrix, ist k Eigenwert genau wenn $\det(A - kI_n) = 0$,
und A hat max. n verschiedene Eigenwerte.
- **Charakteristisches Polynom** von A:
$\chi_A = \det(A - XI) \in K[X]$
  - ▷ Nullstellen von χ_A = Eigenwerte von φ_A
  - ▷ Ist A eine $n \times n$-Matrix, ist χ_A ein Polynom und hat Grad n.
- „Kochrezept“ für Matrix A von φ_A:
  - ▷ $\chi_A = \det(A - \lambda I_n)$ ausrechnen.
  - ▷ Finde Nullstellen von $\chi_A \to$ Eigenwerte.
  - ▷ Löse für jede gefundene Nullstelle λ_i das LGS $(A - \lambda_i I_n)v = 0. \to v$ Eigenvektor.
  - ▷ **Konvention:** Normiere alle v (siehe 9).
- Ist A diagonalisierbar: (s.o.) $\exists S$ Matrix, D Diagonalmatrix: $A = SDS^{-1}$.
  - ▷ Berechne Eigenwerte & -vektoren.
  - ▷ S = Eigenvektoren als Spalten.
  D = Eigenwerte auf der Diagonalen.
  - ▷ Berechne Inverse von S.

  Dann gilt:
  - ▷ $A^n = SD^nS^{-1}$
  (einfacher als manuell multiplizieren!)

9 Euklidische Vektorräume

- **Skalarprodukt** in reellem Vektorraum V ist Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ mit Eigenschaften:
  - ▷ bilinear: $\forall v \in V$: $\langle v, \cdot \rangle$ und $\langle \cdot, v \rangle$ linear
  Bsp.: $\langle 2a, 3b \rangle = 2 \cdot 3 \cdot \langle a, b \rangle$
  - ▷ symmetrisch:
  $\forall v, w \in V : \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
  - ▷ positiv definit: $\forall v \in V \neq 0 : \langle v, v \rangle > 0$
  - ▷ *Skalar**produkt*** $\neq$ *Skalar**multiplikation**!*
- **Euklidischer Vektorraum** $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$:
reeller Vektorraum (in $\mathbb{R}$) mit Skalarprodukt
- **Standard-Skalarprodukt**: $\langle x, y \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
mit $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$
- **Norm** eines Vektors $x \in (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$:
$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
  - ▷ In $\mathbb{R}^2$ mit Standard-Skalarprodukt: Länge (Abstand vom Ursprung) $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
  - ▷ In $\mathbb{R}^3$ analog: $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

  In eukl. Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:
  - ▷ $\forall x \in V : \|x\| \geq 0$
  - ▷ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  - ▷ $\forall k \in \mathbb{R}, x \in V : \|kx\| = |k| \cdot \|x\|$
  - ▷ $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
  (**Dreiecksungleichung**)
- $\forall$ eukl. Vektorraum: $\langle x, y \rangle \leq \|x\| + \|y\|$ für $x, y \in V$ (**Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**)
  - ▷ daher: $-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1$
- **Öffnungswinkel** $\alpha(x, y)$ zw. x und y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $x, y \in V$: $\cos(\alpha(x, y)) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}$
- $v, w \in V$ (eukl. Vr.) sind **orthogonal** ($v \perp w$, „senkrecht zueinander“), wenn $\langle v, w \rangle = 0$.
  - ▷ $v \perp w$ nicht-trivial: $\cos(\alpha(v, w)) = 0$
- Ist $M \subseteq V$ (mit V eukl. Vektorraum), so ist $M^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in M : \langle u, v \rangle = 0\}$ das **orthogonale Komplement** von M.
  - ▷ $M^\perp$ ist ein Unterraum.
- Menge von Vektoren (*kein* Vektor*raum*!) X ist **Orthonormalensystem**, wenn gilt:
  - ▷ $\forall v \in X : \|v\| = 1$
  - ▷ $\forall v, w \in X$ mit $v \neq w : \langle v, w \rangle = 0$

  Dann gilt:
  - ▷ X ist linear unabhängig.
  - ▷ Sei $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und U der davon erzeugte Unterraum. Dann gilt: $\exists$ eindeutig $u \in U, w \in U^\perp : u = \sum_{i=1}^{n} \langle a, v_i \rangle v_i$
  d.h.: Koordinaten zur Basis X brauchen kein LGS, nur Skalarprodukte (wenn Koord. von a. gesucht, $\langle a, v_i \rangle$).

  Nutzen: Aufteilen in 2 Komponenten (Proj.)
- **Gram-Schmidt-Verfahren**:
$a_1, \ldots, a_m \in V$ linear unabhängig.
$\Rightarrow u_k = \frac{a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle u_j, a_k \rangle u_j}{\left\| a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle u_j, a_k \rangle u_j \right\|}$ mit $1 \leq k \leq m$
(nacheinander alle k ausrechnen)
$\Rightarrow \{u_1, \ldots, u_m\}$ ist Orthonormalensystem, das den gleichen Raum aufspannt.
Nutzen: wenn einer der Vektoren a_i linear abhängig zu den anderen ist, so wird die Berechnung mit $\frac{0}{0}$ enden, also das anzeigen („filtern“).
- Sei V eukl. *vollst.* Vektorraum.
$v_1, v_2, \ldots$ sind **Hilbert-Basis**, falls:
  - ▷ $v_1, v_2, \ldots$ sind Orthonormalensystem.
  - ▷ $\langle v_1, v_2, \ldots \rangle$ ist dichte Teilmenge von V.

  Dann gilt:
  - ▷ $\forall v \in V : v = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v, v_n \rangle v_n$