Logik I

Zusammenfassung wichtiger Elemente der Logik

von Alexander Köster

Student der Universität Siegen, L1 2019/20

Letzte Aktualisierung: 23. Februar 2020

Dieser Kurs der Logik befasst sich mit den Grundlagen der Aussagen- und Prädikatenlogik, deren Normalformen und Erfüllbarkeitsalgorithmen.

Einzig für Lernzwecke erstellt.

Nicht geeignet als Klausurhilfe.
Das Erstellen einer eigenen Klausurhilfe führt zu einem besonders guten Lerneffekt.
Dieses Dokument sollte nur als Orientierung oder Vergleich dienen.
Jeder sollte seine Klausurhilfe individuell auf seinen Lernstand und seine eigenen Probleme anpassen, gut bekannte Dinge auslassen und schlecht merkbare Dinge hinzufügen.
Dieses Dokument beinhaltet viel mehr, als für eine tatsächliche Klausur durchschnittlich benötigt wird.
Für einen guten Ansatz, welche Inhalte man braucht, sollte sich an der Probeklausur orientiert werden.

1 Aussagenlogik

- **Formel**: **atomare Formeln** A_i $(i \in \mathbb{N})$ sind Form.; für Formeln F, G sind $\neg F$ (**Neg.**), $(F \vee G)$ (**Disjunktion**) und $(F \wedge G)$ (**Konjunktion**) F.
- **Wahrheitswerte**: $\{0, 1\}$
- **Belegung**: $\mathcal{B}: D \to \{0,1\}, D \subseteq \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und $\widehat{\mathcal{B}}: E \to \{0,1\}, E \supseteq D$ Menge aller Formeln aus D, Bild definiert durch Werte von $\mathcal{B}$:
  - ▷ $\widehat{\mathcal{B}}(A_i) = \mathcal{B}(A_i)$
  - ▷ $\widehat{\mathcal{B}}((F \wedge G)) = 1$ falls $\widehat{\mathcal{B}}(F) = \widehat{\mathcal{B}}(G) = 1$, sonst 0
  - ▷ $\widehat{\mathcal{B}}((F \vee G)) = 1$ falls $\widehat{\mathcal{B}}(F) = 1$ oder $\widehat{\mathcal{B}}(G) = 1$, sonst 0
  - ▷ $\widehat{\mathcal{B}}(\neg F) = 1$ falls $\widehat{\mathcal{B}}(F) = 0$, sonst 0

  Schreibe $\mathcal{B}$ statt $\widehat{\mathcal{B}}$, da intuitive Fortsetzung.
- **Implikation**: $(F \to G) := (\neg F \vee G)$
- **„Gdw."**: $(F \leftrightarrow G) := ((F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G))$
- zu F **passende** Belegung $\mathcal{B}: D \to \{0,1\}$: wenn $D \supseteq \{$alle atomaren Formeln aus $F\}$
- $\mathcal{B} \models F$ („$\mathcal{B}$ **Modell** von F") $:\Leftrightarrow \mathcal{B}(F) = 1$, sonst $\mathcal{B} \not\models F$ („$\mathcal{B}$ kein Modell von F")
- F **erfüllbar**, wenn F min. ein Modell besitzt
- $\{F_1, F_2, \ldots\}$ **erfüllbar**, wenn es (min.) eine Belegung gibt, die Modell ist für alle $F_1, F_2, \ldots$
- F **gültig** oder **Tautologie** ($\models F$), wenn jede passende Belegung ein Modell ist
- F **unerfüllbar**, wenn F kein Modell besitzt
- G **Folgerung** von $F_1, \ldots, F_k$ ($F_1, \ldots, F_k \models G$), wenn jedes zu $G, F_1, \ldots, F_k$ passende Modell von $\{F_1, \ldots, F_k\}$ auch Modell von G ist
- *Theorem:* $F_1, \ldots, F_k \models G$
  $\Leftrightarrow \left((\bigwedge_{i=1}^k F_i) \to G\right)$ gültig
  $\Leftrightarrow \left((\bigwedge_{i=1}^k F_i) \wedge \neg G\right)$ unerfüllbar
- **Äquivalenz**: $F \equiv G :\Leftrightarrow \mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$ für alle passenden $\mathcal{B}$ $\quad \Leftrightarrow F \models G$ und $G \models F$
- *Einige weitere Äquivalenzen:*
  - ▷ $(F \to G)$ gültig $\Leftrightarrow F \models G$
  - ▷ $(F \leftrightarrow G)$ gültig $\Leftrightarrow F \equiv G$
  - ▷ $(F \wedge G) \models H \Leftrightarrow F \models G \to H$ (**Currying**)
  - ▷ $F_1, \ldots, F_k \models G \Leftrightarrow F_1 \wedge \cdots \wedge F_k \models G$
  - ▷ $(F \leftrightarrow G) \equiv (F \to G) \wedge (G \to F)$
  - ▷ $\mathcal{B} \models F \Leftrightarrow \mathcal{B} \not\models \neg F$
- **Reduktion:**
  - ▷ F gültig $\Leftrightarrow T \models F$ für bel. gültige F. T
  - ▷ F gültig $\Leftrightarrow F \equiv T$ für bel. gültige F. T
- **Ersetzbarkeitstheorem**: $F \equiv G$, $H = XFX'$ (hat Teilf. F) $\Rightarrow H \equiv XGX'$ (F ers. durch G)
- *Wichtige Äquivalenzen für $\vee$ und $\wedge$:*
  - ▷ **Idempotenz**: $(F \wedge F) \equiv (F \vee F) \equiv F$
  - ▷ **Kommutativität** und **Assoziativität**
  - ▷ **Absorption**: $(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$
    $(F \vee (F \wedge G)) \equiv F$
  - ▷ **Distributivität** beider Operatoren:
    $(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$
    $(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$
  - ▷ **DeMorgan**: $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$
    $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$
  - ▷ Falls F gültig (**Tautologieregeln**):
    $(F \vee G) \equiv F$, $\quad (F \wedge G) \equiv G$
  - ▷ Falls F unerfüllbar:
    $(F \vee G) \equiv G$, $\quad (F \wedge G) \equiv F$
- **Literal**: atomare Formel (positives Literal) oder negierte atomare Formel (negatives Literal)
  - ▷ Für Literal L sei das **negierte Literal**
    $$\overline{L} := \begin{cases} \neg A_i & \text{falls } L = A_i \\ A_i & \text{falls } L = \neg A_i \end{cases}$$
    für eine atomare Formel A_i
    das Literal der jeweils anderen Parität.

- F ist in **KNF**, wenn Konjunktion von Disjunktionen von Literalen: $F = \left(\bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j}\right)\right)$
- F ist in **DNF**, wenn Disjunktion von Konjunktionen von Literalen: $F = \left(\bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j}\right)\right)$
- Zu jeder Formel F existiert eine äquivalente KNF und DNF. (Nicht zwingend eindeutig!)
- **Ablesen KNF/DNF aus Wahrheitstafel**:
  $$\mathrm{DNF}(F) := \bigvee_{\mathcal{B} \models F} \left(\bigwedge_{i=1}^n A_i^{\mathcal{B}(A_i)}\right)$$
  $$\mathrm{KNF}(F) := \bigwedge_{\mathcal{B} \not\models F} \left(\bigvee_{i=1}^n A_i^{1-\mathcal{B}(A_i)}\right)$$
  wobei $A_i^0 = \neg A_i$, $A_i^1 = A_i$.
  Es gilt: $F \equiv \mathrm{DNF}(F) \equiv \mathrm{KNF}(F)$
- **Bsp.:**

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

  $\mathrm{DNF}(F) = (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$
  $\mathrm{KNF}(F) = (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$
- F unerfüllbar $\Leftrightarrow \mathrm{DNF}(F)$ leere Disjunktion
  F gültig $\Leftrightarrow \mathrm{KNF}(F)$ leere Konjunktion
- **KNF** von F **durch Umformen**:
  1. Ersetze in F jedes Vorkommen von Tf.:
     - ▷ $\neg\neg G$ durch G
     - ▷ $\neg(G \wedge H)$ durch $(\neg G \vee \neg H)$
     - ▷ $\neg(G \vee H)$ durch $(\neg G \wedge \neg H)$

     („Reinziehen aller $\neg$ mit DeMorgan")
  2. Ersetze in F jedes Vorkommen von Tf.:
     - ▷ $(F \vee (G \wedge H))$ durch $((F \vee G) \wedge (F \vee H))$
     - ▷ $((F \wedge G) \vee H)$ durch $((F \vee H) \wedge (G \vee H))$

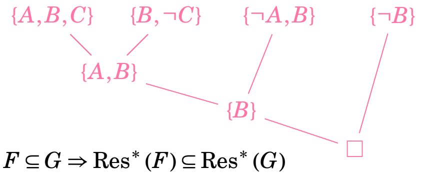
     („$\wedge$ mit Distributivg. nach außen bringen")
- **Bsp.:** $F = ((A \vee B) \vee \neg(A \vee \neg C))$
  $\equiv ((A \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg\neg C))$
  $\equiv ((A \vee B) \vee (\neg A \wedge C))$
  $\equiv (((A \vee B) \vee \neg A) \wedge ((A \vee B) \vee C))$
- **DNF** von F **durch Umformen**:
  1. Ersetze in F jedes Vorkommen von Tf.
     - ▷ $\neg\neg G$ durch G
     - ▷ $\neg(G \wedge H)$ durch $(\neg G \vee \neg H)$
     - ▷ $\neg(G \vee H)$ durch $(\neg G \wedge \neg H)$

     („Reinz. aller $\neg$ mit DeMorgan") analog KNF
  2. Ersetze in F jedes Vorkommen von Tf.
     - ▷ $(F \wedge (G \vee H))$ durch $((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$
     - ▷ $((F \vee G) \wedge H)$ durch $((F \wedge H) \vee (G \wedge H))$

     („$\vee$ mit Distributivg. nach außen bringen")
- **Bindungsstärke**: $\leftrightarrow\ < \ \to\ < \ \vee\ < \ \wedge\ < \ \neg$ (stärkste)
- **Mengendarstellung** (**Klauselschreibweise**):
  (nicht verwechseln mit Klausel*form*!)
  - ▷ **Klausel**: Disjunktion von Literalen
  - ▷ KNF = Konjunktion von Klauseln
  - ▷ $\left(\bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j}\right)\right) \mapsto \left\{\{L_{i,j} \mid j \in \underline{m_i}\} \,\middle|\, i \in \underline{n}\right\}$
  - ▷ **Leere Klausel**: $\square := \emptyset = \{\}$
  - ▷ $\{\square\} \equiv$ unerfüllbare Formel
    $\{\} \equiv$ gültige Formel
  - ▷ **Bsp.:** $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$
    $\mapsto \{\{A, \neg B\}, \{\neg A, B\}\}$
  - ▷ Vorteile: Kommutativität, Assoziativität und Idempotenz erhält man automatisch durch Mengeneigenschaften
- **Hornformel**: KNF, in der jede Klausel max. ein positives Literal enthält
  Notation: **implikative Form**
  - ▷ $(\neg A \vee \neg B \vee C)$ wird zu $(A \wedge B \to C)$
  - ▷ $(\neg A \vee \neg B)$ wird zu $(A \wedge B \to 0)$
  - ▷ A wird zu $(1 \to A)$

- **Markierungsalgorithmus**:
  EINGABE: Hornformel F
  1. Markiere jedes Vorkommen einer atomaren F. A in F, falls $\exists$ Tf. $(1 \to A)$ in F
  2. WHILE $\exists$ Tf. $G = (A_1 \wedge \cdots \wedge A_k \to B)$ mit $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $A_1, \ldots, A_k$ bereits markiert, B nicht markiert oder $B = 0$ DO:
     IF $B \neq 0$ THEN markiere jedes B
     ELSE RETURN „UNERFÜLLBAR"
     ENDWHILE
  3. RETURN „ERFÜLLBAR"
- **Bsp.:** $(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge \neg C \wedge A \wedge (\neg A \vee B)$
  $\equiv ((A \wedge B) \to C) \wedge (C \to 0) \wedge (1 \to A) \wedge (A \to B)$
  1. Markiere A wegen $1 \to A$
  2. Markiere B wegen $A \to B$ mit A markiert
  3. Mark. C wg. $A \wedge B \to C$ mit A & B mark.
  4. UNERFÜLLBAR wg. $C \to 0$ mit C markiert
- $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2: \{A_1, \ldots, A_n\} \to \{0,1\}$ Belegungen.
  $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2 :\Leftrightarrow \forall i \in \underline{n}: \mathcal{B}_1(A_i) = 1 \Rightarrow \mathcal{B}_2(A_i) = 1$
  $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2): \{A_1, \ldots, A_n\} \to \{0,1\}$,
  $A \mapsto \mathcal{B}_1(A) \wedge \mathcal{B}_2(A)$
  $\Rightarrow \inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \leq \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ und für Hornformel F gilt $\mathcal{B}_1 \models F$, $\mathcal{B}_2 \models F \Rightarrow \inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \models F$.
- Um das kleinste Modell einer Hornformel zu bekommen, gib im letzten Schritt des Markierungsalgorithmus $\mathcal{B}$ zurück mit $\mathcal{B}(A) = 1 \Leftrightarrow A$ im Algorithmus markiert wurde.
- R ist **Resolvent** von Klauseln K_1, K_2, wenn für ein Literal L in K_1 das negierte Literal $\overline{L}$ in K_2 vorkommt, und $R = (K_1 \setminus \{L\}) \cup (K_2 \setminus \{\overline{L}\})$.

  Notation:
  $$\begin{tikzcd}[column sep=small] K_1 \arrow[dr, no head] & & K_2 \arrow[dl, no head] \\ & R & \end{tikzcd}$$
- **Resolutionslemma**: F in KNF als Klauselmenge, R Resolvent zweier Klauseln $K_1, K_2 \in F$ $\Rightarrow F \equiv F \cup \{R\}$.
- $\mathrm{Res}(F) := F \cup \{R \mid R$ Resolvent v. zw. Kl. in $F\}$
  $= F \cup \{(K_1 \setminus \{A\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg A\}) \mid K_1, K_2 \in F,\ A \in K_1, \neg A \in K_2\}$
  $\mathrm{Res}^0(F) := F$, $\quad \mathrm{Res}^{n+1}(F) := \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^n(F))$
- **Resolutionshülle**: $\mathrm{Res}^*(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathrm{Res}^n(F)$
- Mit Resolutionslemma folgt: $F \equiv \mathrm{Res}^*(F)$
- **Resolutionssatz d. Aussagenlogik**:
  Klauselmenge F unerfüllbar $\Leftrightarrow \square \in \mathrm{Res}^*(F)$
- **Deduktion/Resolutionskalkül**: resolviere immer zwei Klauseln miteinander, bis die leere Klausel erreicht wurde
  Bsp.: $F = \{\{A, B, C\}, \{\neg A, B\}, \{B, \neg C\}, \{\neg B\}\}$

  
- $F \subseteq G \Rightarrow \mathrm{Res}^*(F) \subseteq \mathrm{Res}^*(G)$
- **Endlichkeitssatz d. Aussagenlogik**: Sei M (potenziell unendliche) Menge von Formeln. M erfüllbar $\Leftrightarrow$ jede endl. Teilmenge von M erfüllbar
  Konstruktion eines Modells von M:
  $I_0 := \mathbb{N}_{\geq 1}$
  FORALL $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ DO
  IF $\exists$ unendlich viele Indizes $i \in I_{n-1}$ mit $\mathcal{B}_i(A_i) = 1$ THEN
  $\mathcal{B}(A_n) := 1$
  $I_n := \{i \in I_{n-1} \mid \mathcal{B}_i(A_n) = 1\}$
  ELSE
  $\mathcal{B} := (A_n) := 0$
  $I_n := \{i \in I_{n-1} \mid \mathcal{B}_i(A_n) = 0\}$
  ENDIF
  ENDFOR
  Wobei $\mathcal{B}_n$ Modell der Menge von Formeln aus M, die nur die atomaren Teilformeln $A_1, \ldots, A_n$ enthalten (betrachte deren endl. Wahrheitstafeln $\rightsquigarrow$ endl. Menge).

2 Prädikatenlogik

- **Variablen** $\{x_0, x_1, \ldots\}$, Konvention: u, w, x, y, z
- **Prädikatensymbol** $P_i^{(k)}$, Konvention: P, Q, R
  Unterscheidungsindex i, Stelligkeit $k \in \mathbb{N}_0$
- **Funktionssymbol** $f_i^{(k)}$, Konvention: f, g, h; @
  Unterscheidungsindex i, Stelligkeit $k \in \mathbb{N}_0$
- **Konstante**: Funktionssymbol mit Stelligkeit 0
  Konvention: a, b, c, d, e
- **Term**: Jede Variable ist Term; falls f Funktionssymbol mit Stelligkeit k und $t_1, \ldots, t_k$ Terme, so ist $f(t_1, \ldots, t_k)$ ebenfalls Term.
- **Formel**:
  - ▷ P Prädikatensymbol mit Stelligkeit k, $t_1, \ldots, t_k$ Terme $\Rightarrow P(t_1, \ldots, t_k)$ Formel (**atomare Formel**)
  - ▷ F Formel $\Rightarrow \neg F$ Formel
  - ▷ F, G Form. $\Rightarrow (F \wedge G)$, $(F \vee G)$ Formeln
  - ▷ x Variable, F Formel $\Rightarrow \exists x F$ und $\forall x F$ Formeln (**Existenz-/Allquantor**)
- **freie Variable**: Variable, die nicht durch Quantor gebunden wurde. **Bsp.:** $(P(x) \wedge \forall x Q(x))$
- **Aussage**: Formel ohne freie Variablen
- **Matrix** F^* von Formel F: alle Quantoren und die jeweils direkt dahinterstehende Variable in F weglassen.
- **Struktur** $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$
  - ▷ **Universum/Grundmenge** $U_\mathcal{A} \neq \emptyset$
  - ▷ **Interpretationsabbildung** $I_\mathcal{A}$:
    - k-stelliges Prädikatensymbol P $\mapsto k$-stellige Relation $P^\mathcal{A} \subseteq U_\mathcal{A}^k$
    - k-stelliges Funktionssymbol f $\mapsto k$-stellige Abb. $f^\mathcal{A} : U_\mathcal{A}^k \to U_\mathcal{A}$
    - freie Variable $x \mapsto$ Element $x^\mathcal{A} \in U_\mathcal{A}$
  - ▷ $\mathcal{A}$ **passend** zu Formel F, falls $I_\mathcal{A}$ für alle in F vorkommenden Prädikaten-, Funktionssymbole und freie Variablen definiert
- **Auswertung**: F Formel, $\mathcal{A}$ passende Struktur, t Term aus F. **Wert** $\mathcal{A}(t) \in U_\mathcal{A}$:
  - ▷ $t = x$ Variable $\Rightarrow \mathcal{A}(t) = x^\mathcal{A}$
  - ▷ $t = f(t_1, \ldots, t_k)$ für $t_1, \ldots, t_k$ Terme, f ein k-stelliges Funktionssymbol $\Rightarrow \mathcal{A}(t) = f^\mathcal{A}(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k))$

  Wahrheitswert $\mathcal{A}(F)$:
  - ▷ $F = P(t_1, \ldots, t_k)$ mit Termen $t_1, \ldots, t_k$ und k-stelligem Prädikatensymbol P
    $\Rightarrow \mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1 & (\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k)) \in P^\mathcal{A} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - ▷ $F = \neg G \Rightarrow \mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1 & \mathcal{A}(G) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - ▷ $F = (G \wedge H)$
    $\Rightarrow \mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1 & \mathcal{A}(G) = \mathcal{A}(H) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - ▷ $F = (G \vee H)$
    $\Rightarrow \mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1 & \mathcal{A}(G) = 1 \text{ oder } \mathcal{A}(H) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - ▷ $F = \forall x G$
    $\Rightarrow \mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } d \in U_\mathcal{A} \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(G) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - ▷ $F = \exists x G$
    $\Rightarrow \mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1 & \text{falls ein } d \in U_\mathcal{A} \text{ exist. mit } \mathcal{A}_{[x/d]}(G) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

  mit $\mathcal{A}_{[x/d]}$ identisch zu $\mathcal{A}$ bis auf $x^{\mathcal{A}_{[x/d]}} = d$.
- $\mathcal{A} \models F$ („$\mathcal{A}$ **Modell** von F") $:\Leftrightarrow \mathcal{A}(F) = 1$, sonst $\mathcal{A} \not\models F$.
- F **erfüllbar**, wenn F min. ein Modell besitzt, sonst **unerfüllbar**.
- F **gültig** ($\models F$), wenn jede passende Struktur Modell von F ist. **Bsp.:** $\forall x F \to \exists x F$
- Konvention: **Gleichheit**: $=^\mathcal{A} := \{(a,a) \mid a \in U_\mathcal{A}\}$
- Frei vorkommende Variablen in Formel F:
  - ▷ $\text{Free}(x) = \{x\}$
  - ▷ $\text{Free}(f(t_1, \ldots, t_k)) = \bigcup_{i=1}^k \text{Free}(t_i)$
  - ▷ $\text{Free}(P(t_1, \ldots, t_k)) = \bigcup_{i=1}^k \text{Free}(t_i)$
  - ▷ $\text{Free}(\neg G) = \text{Free}(G)$
  - ▷ $\text{Free}(G \wedge H) = \text{Free}(G) \cup \text{Free}(H)$
  - ▷ $\text{Free}(\exists x G) = \text{Free}(G) \setminus \{x\}$
- **Bsp.:** *Einige prädikatenlog. algebr. Aussagen:*
  1. $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_\mathcal{N})$
     mit $I_\mathcal{N}(+)$, $I_\mathcal{N}(\cdot)$ und $I_\mathcal{N}(=)$.
     (a) „x ist gerade": $\exists y(x = y + y)$
     (b) „x ist ungerade": $\neg \exists y(x = y + y)$
     (c) „$x < y$": $\exists z(y = x + z)$
     (d) „y ist Vielfaches von x": $\exists z(y = x \cdot z)$
     (e) „$x = 1$": $\forall y(y = y \cdot x)$
     (f) „$x \equiv z \mod y$" bzw. „$x \bmod y = z$": $\exists k(y \cdot k + z = x)$
     (g) „+ kommutativ": $\forall x \forall y(x + y = y + x)$
     (h) „+ assoziativ": $\forall x \forall y \forall z((x + y) + z = x + (y + z))$
     (i) „Es gibt keine größte nat. Zahl": $\neg \exists \forall y \exists z(x = y + z)$
     (j) „x ist Primzahl": $\neg 1_x \wedge \forall y(\neg 1_y \wedge \neg(x = y) \to \neg \exists z(x = z \cdot y))$ wobei die Formel 1_z besagt, dass $z = 1$ (s. o. 1e).
  2. $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, I_\mathcal{R})$ mit $I_\mathcal{R}(\cdot)$ und $I_\mathcal{R}(=)$.
     (a) „$\cdot$ hat neutr. El.": $\exists y \forall x(x \cdot y = x)$
     (b) „$x = 0$": $\forall y(x \cdot y = x)$
     (c) „x ist positiv": $\exists y(x = y \cdot y)$
- G **Folgerung** von $F_1, \ldots, F_k$ ($F_1, \ldots, F_k \models G$), wenn jedes zu G passende Modell von $\{F_1, \ldots, F_k\}$ auch Modell von G ist.
- **Äquivalenz**: $F \equiv G :\Leftrightarrow \mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für alle passenden Str. $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow F \models G$ und $G \models F$
- *Einige Äquivalenzen* für Formeln F, G:
  - ▷ $\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$ ▷ $\neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$
  - ▷ $(\forall x F \wedge \forall x G) \equiv \forall x(F \wedge G)$
  - ▷ $(\exists x F \vee \exists x G) \equiv \exists x(F \vee G)$
  - ▷ $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$
  - ▷ $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$

  Falls x in G nicht frei vorkommt:
  - ▷ $(\forall x F \wedge G) \equiv \forall x(F \wedge G)$
  - ▷ $(\forall x F \vee G) \equiv \forall x(F \vee G)$
  - ▷ $(\exists x F \wedge G) \equiv \exists x(F \wedge G)$
  - ▷ $(\exists x F \vee G) \equiv \exists x(F \vee G)$
- **Umbenennung von Variablen**: $F = QxG$ eine Formel, $Q \in \{\forall, \exists\}$, y Variable, die in G nicht vorkommt. $\Rightarrow F \equiv QyG[x/y]$.
- Dabei sei die **Substitution** $[x/t]$ für Term t folgend definiert:
  - ▷ $x[y/t] = \begin{cases} t & x = y \\ x & x \neq y \end{cases}$
  - ▷ $f(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$
  - ▷ $R(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = R(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$
  - ▷ $(F \wedge G)[x/t] = (F[x/t] \wedge G[x/t])$
  - ▷ $(\neg F)[x/t] = \neg(F[x/t])$
  - ▷ $\forall x F[y/t] = \begin{cases} \forall x F & x = y \\ \forall x F[y/t] & x \neq y \end{cases}$
- Formel F **bereinigt** $:\Leftrightarrow$ keine Variable sowohl gebunden als auch frei vorkommt, und hinter jedem Quantor eine andere Variable steht.

  Lemma: Zu jeder Formel F gibt es eine äquivalente bereinigte Formel.
- **Pränexform:** „Alle Quantoren ganz außen"
  $F = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n G$
  mit $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $y_1, \ldots, y_n$ Variablen, $n \in \mathbb{N}_0$, und in G komme kein Quantor vor.
- **BPF**: bereinigte Formel in Pränexform
  Satz: Jede Formel F hat eine äquivalente BPF.
  Induktive/rekursive Konstruktion der BPF F':
  - ▷ F atomare F. $\Rightarrow F' := F$
  - ▷ $F = \neg G$ und $G \equiv Q_1 y_1 \ldots Q_n y_n H$
    $\Rightarrow F' := \overline{Q_1} y_1 \ldots \overline{Q_n} y_n \neg H$; $\overline{\exists} = \forall$, $\overline{\forall} = \exists$
  - ▷ $F = F_1 \wedge F_2$
    und $F_1 \equiv Q_1 y_1 \ldots Q_m y_m G_1$,
    $F_2 \equiv P_1 z_1 \ldots P_n z_n G_2$ (ggf. umbenennen, sodass $y_i \neq z_j$ $\forall i \in \underline{m}$, $j \in \underline{n}$)
    $\Rightarrow F' := Q_1 y_1 \ldots P_n z_n (G_1 \wedge G_2)$
  - ▷ $F = \forall x G$ und $G \equiv Q_1 y_1 \ldots Q_n y_n H$
    $\Rightarrow F' := \forall x Q_1 y_1 \ldots Q_n y_n H$ (ggf. umbenennen, sodass $x \neq y_i$ $\forall i \in \underline{n}$)
- **BPF-Algorithmus** für bel. Formel F:
  1. F bereinigen (Variablen umbenennen)
  2. Ersetzen aller Implikationen & Äquivalenzen (bilde „Grundform" aus $\vee, \wedge, \neg$)
  3. „$\neg$" vor Quantoren mit Äquivalenzgesetzen nach innen ziehen
  4. Alle Quantoren in der genauen Reihenfolge des Vorkommens nach außen schreiben (Pränexform)
- **Skolemform**: BPF, die keine „$\exists$" mehr enthält
  Für BPF F: Ersetze „$\exists x_i$" in F durch neues Funktionssymbol $f_{x_i}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{i^*}})$, wobei i^* Anzahl der vor „$\exists x_i$" stehenden Allquantoren ist, f_{x_i} i^*-stellig, und x_{i_j} die Variable hinter dem j-ten Allquantor vor „$\exists x_i$", $\forall j \in \underline{i^*}$.
- *Satz:* F erfüllbar $\Leftrightarrow$ Skolemform von F erfüllbar (**erfüllbarkeitsäquivalent**)
  Achtung: i. A. $F \not\equiv$ Skolemform von F
- Jedes Modell der Skolemform von F ist auch ein Modell für F. (Nicht andersherum.)
- **Überführungslemma**: F Formel, x Variable, t Term, der keine in F gebundene Variable enthält. $\Rightarrow$ Für jede zu F passende Struktur $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}(F[x/t]) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(t)]}(F)$
- **Skolemform** einer Menge M von Formeln: ersetze jede Formel durch ihre Skolemform; neue Funktionssymbole der verschiedenen Formeln disjunkt benennen.
  Satz: M erfüllbar $\Leftrightarrow$ Skolemform v. M erfüllbar
- **Klauselform**: Aussage in Skolemform mit Matrix in KNF (d. h. $\forall y_1 \ldots \forall y_n F$, wobei F in KNF ist, keine freien Var. & keine Quantoren enthält)
  (Nicht verwechseln mit Klausel*schreibweise*!)
- Algorithmus für Klauselform: Führe BPF-Algorithmus aus, dann:
  5. Bilde Skolemform (s. Def. Skolemform)
  6. Forme die Matrix um in KNF
- **Herbrand-Universum** $\mathrm{D}(\mathcal{F})$ für eine Menge $\mathcal{F}$ von Funktionssymbolen, die min. eine Konstante enthält, ist die Menge aller variblenfreien Terme, die man aus den Symbolen in $\mathcal{F}$ bilden kann. **Bsp.:** $\mathrm{D}(\{f(\_), a\}) = \{f^i(a) \mid i \in \mathbb{N}_0\}$
- **Herbrand-Struktur**: $\mathcal{A} = (\mathrm{D}(\mathcal{F}), I_\mathcal{A})$ mit
  - ▷ $\mathcal{F}$ Menge von Funktionssymbolen, die min. eine Konstante enthält
  - ▷ $I_\mathcal{A}$ sei definiert für genau die Funktionssymbole aus $\mathcal{F}$
  - ▷ n-st. $f \in \mathcal{F}$ und Terme $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{D}(\mathcal{F})$ $\Rightarrow f^\mathcal{A}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$

  Dann gilt: $t \in \mathrm{D}(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{A}(t) = t$
- **Herbrand-Modell** einer Menge M von Formeln ist Herbrand-Struktur $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models M$.

- **Fundamentalsatz d. Prädikatenlogik**: M Menge von Aussagen in Skolemform. M erfüllbar $\Leftrightarrow$ M besitzt Herbrand-Modell
- **Satz v. Löwenheim & Skolem**: Jede erfüllbare Menge v. Aussagen besitzt ein Modell mit abzählbarem Universum (**abzählbares Modell**)
- Sei M Menge von Aussagen in Skolemform, $\mathcal{F}$ Menge von Funktionssymbolen, die in M vorkommen, a eine fest gewählte Konstante.

  $$\mathrm{D}(M) := \begin{cases} \mathrm{D}(\mathcal{F}) & \text{falls } \mathcal{F} \text{ Konstante enth.} \\ \mathrm{D}(\mathcal{F} \cup \{a\}) & \text{sonst} \end{cases}$$

  Herbrand-Expansion:
  $$\mathrm{E}(M) := \{F^*[y_1/t_1]\dots[y_n/t_n] \mid \forall y_1 \dots \forall y_n F^* \in M,\ t_1,\dots,t_n \in \mathrm{D}(M)\}$$
  d. h. ersetze Variablen in F^* ($F \in M$) in jeder möglichen Weise durch Terme aus $\mathrm{D}(M)$.
- Wenn M erfüllbar, $\exists$ Herbrand-Modell mit Universum $\mathrm{D}(M)$.
- **Satz von Gödel–Herbrand–Skolem**: M Menge von Aussagen in Skolemform ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ M im aussagenlogischen Sinne erfüllbar.

  Dabei seien die atomaren Formeln alle $P(t_1,\dots,t_n)$ für Prädikatensymbole P, die in M vorkommen, und $t_1,\dots,t_n \in \mathrm{D}(M)$.
- **Endlichkeitssatz der Prädikatenlogik**: Menge M von prädikatenlogischen Formeln ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ jede endl. Teilmenge von M erfüllbar
- **Satz v. Herbrand:** Aussage F in Skolemform unerfüllbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ endl. Teilmenge von $\mathrm{E}(\{F\})$, die (im aussagenlog. Sinn) unerfüllbar ist
- **Algorithmus v. Gilmore**:

  EINGABE: Aussage in Skolemform F

  Sei $F_1, F_2, \dots$ Aufzählung von $\mathrm{E}(\{F\})$.

  $n := 0$
  REPEAT $n := n+1$
  UNTIL $(F_1 \wedge \dots \wedge F_n)$ unerfüllbar
  (z. B. durch Wahrheitstafel/Resolution)
  RETURN „UNERFÜLLBAR"

  Satz: F unerfüllbar $\Rightarrow$ termin. nach endl. Zeit. F erfüllbar $\Rightarrow$ Alg. terminiert *nicht*.

  $\Rightarrow$ Menge der unerfüllbaren (und gültigen) prädikatenlog. Aussagen ist **semi-entscheidbar**.
- **Grundresolution**: F Aussage in Klauselform, sei $F_1, F_2, \dots$ Aufzählung von $\mathrm{E}(\{F\})$. Betrachte F^* als Klauselmenge $\Rightarrow$ jedes F_i Menge von Klauseln.

  EINGABE: F in Klauselform

  Berechne $\mathrm{D}(\{F\})$, $\mathrm{E}(\{F\}) = \{F_1, F_2, \dots\}$
  $i := 0$; $M := \emptyset$
  REPEAT
  $i := i+1$
  $M := M \cup F_i$
  $M := \mathrm{Res}^*(M)$
  UNTIL $\square \in M$
  RETURN „UNERFÜLLBAR"
- **Grundresolutionssatz**: Aussage in Klauselform F ist unerfüllbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ Folge von Klauseln $K_1,\dots,K_n$ mit $K_n = \square$ und für alle $i \in \underline{n}$ gilt:
  - ▹ *entweder* $K_i = K[y_1/t_1]\dots[y_k/t_k]$, $t_j \in \mathrm{D}(\{F\})$, $K \in F^*$
  - ▹ *oder* K_i (aussagenlog.) Resolvent von K_a, K_b mit $a, b \in \underline{i}$
- **Grundresolution** alternativ für Klauselform F:
  1. Berechne $\mathrm{D}(\{F\})$.
  2. Berechne $\mathrm{E}(\{F\})$, ausgedrückt in Klauselschreibweise.
  3. Ber. $\bigcup \mathrm{E}(\{F\})$ (Menge aller Klauseln).
  4. Führe (aussagenlog.) Resolution von $\bigcup \mathrm{E}(\{F\})$ als Klauselmenge durch (atom. Formeln $P(t_1,\dots,t_n)$) bis $\square$ resolviert. $\Rightarrow$ unerfüllbar.
- **Substitution** sub: Abbildung endl. Menge von Variablen $\to$ Menge aller Terme.

  $\mathrm{Def}(\mathrm{sub})$ sei Definitionsbereich von sub.
- **Anwendung** der Substitution sub: Für einen Term t sei $t\,\mathrm{sub}$ definiert durch:
  - ▹ $x\,\mathrm{sub} = \mathrm{sub}(x)$, falls $x \in \mathrm{Def}(\mathrm{sub})$
  - ▹ $y\,\mathrm{sub} = y$ falls $y \notin \mathrm{Def}(\mathrm{sub})$
  - ▹ $f(t_1,\dots,t_n)\,\mathrm{sub} = f(t_1\,\mathrm{sub},\dots,t_n\,\mathrm{sub})$ für n-st. Funktionss. f, Terme $t_1,\dots,t_n$

  Für Literal F (evtl. negierte atom. F.) sei Anwendung $F\,\mathrm{sub}$ definiert durch:
  - ▹ $P(t_1,\dots,t_n)\,\mathrm{sub} = P(t_1\,\mathrm{sub},\dots,t_n\,\mathrm{sub})$
  - ▹ $\neg P(t_1,\dots,t_n)\,\mathrm{sub} = \neg P(t_1\,\mathrm{sub},\dots,t_n\,\mathrm{sub})$
- **Ersetzung** $[x/t]$ für Variable x, Term t ist Substitution mit $\mathrm{Def}([x/t]) = \{x\}$ und $[x/t](x) = t$.
- **Verknüpfung** von Substitutionen: Wende bei $t\,\mathrm{sub}_1\mathrm{sub}_2$ zuerst sub_1 an, dann sub_2.
- Jede Substitution kann durch Verknüpfung endl. vieler Ersetzungen dargestellt werden.
- **Leere Substitution**: $[]$ mit $\mathrm{Def}([]) = \emptyset$ (d. h. $t[] = t$ für jeden Term t). Man schreibt manchmal auch $\emptyset := []$ für die leere Substitution.
- *Lemma:* Falls $x \notin \mathrm{Def}(\mathrm{sub})$ und x in keinem der Terme $y\,\mathrm{sub}$ mit $y \in \mathrm{Def}(\mathrm{sub})$ vorkommt, so gilt: $[x/t]\,\mathrm{sub} = \mathrm{sub}[x/t\,\mathrm{sub}]$
- **Unifikator** einer Menge $\boldsymbol{L} = \{L_1,\dots,L_k\}$ von Literalen: sub mit $L_1\,\mathrm{sub} = \dots = L_k\,\mathrm{sub}$, d. h. $|\boldsymbol{L}\,\mathrm{sub}| = |\{L_1\,\mathrm{sub},\dots,L_k\,\mathrm{sub}\}| = 1$.
- sub ist **allgemeinster Unifikator** von $\boldsymbol{L}$, wenn $\forall$ Unifikator sub' : $\exists$ Subst. s mit $\mathrm{sub}' = \mathrm{sub}\,s$.
- **Unifizierbar**: Wenn ein Unifikator existiert.
- **Unifikationsalgorithmus**:

  EINGABE: endl. Literalmenge $\boldsymbol{L} \neq \emptyset$

  $\mathrm{sub} := []$
  WHILE $|\boldsymbol{L}\,\mathrm{sub}| > 1$ DO
  Suche erste Position, an der sich zwei Literale $L_1, L_2 \in \boldsymbol{L}\,\mathrm{sub}$ unterscheiden.
  IF keines der beiden Symbole an dieser Position Variable ist THEN
  RETURN „nicht unifizierbar" (stoppe hier)
  ELSE
  Sei x die Variable und t der Term im anderen Literal.
  IF x kommt in t vor THEN
  RETURN „NICHT UNIFIZIERBAR"
  ELSE $\mathrm{sub} := \mathrm{sub}[x/t]$
  ENDWHILE; RETURN sub
- **Bsp.:** $\boldsymbol{L} = \{P(x, f(x)), P(f(y), y)\}$

  $P(\boldsymbol{x}, f(x))$
  $P(\boldsymbol{f(y)}, y)$
  $\rightsquigarrow \mathrm{sub} := [][x/f(y)] = [x/f(y)]$
  $\boldsymbol{L} = \{P(f(y), f(f(y))),\ P(f(y), y)\}$
  $P(f(y), \boldsymbol{f(f(y))})$
  $P(f(y), \boldsymbol{y})$
  $\rightsquigarrow$ nicht unifizierbar (y kommt in $f(f(y))$ vor).
- R **prädikatenlogischer Resolvent** von Klauseln K_1, K_2, wenn:
  - ▹ $\exists$ Variablenumbenennungen s_1, s_2, sodass $K_1 s_1$ und $K_2 s_2$ keine gemeinsamen Variablen enthalten.
  - ▹ $\exists m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, Literale $L_1,\dots,L_m$ aus $K_1 s_1$ und Literale $L'_1,\dots,L'_n$ aus $K_2 s_2$, sodass $\boldsymbol{L} = \{\overline{L_1},\dots,\overline{L_m}, L'_1,\dots,L'_n\}$ unifizierbar. Sei sub allgemeinst. Unifikator.
  - ▹ $R = \big((K_1 s_1 \setminus \{L_1,\dots,L_m\}) \cup (K_2 s_2 \setminus \{L'_1,\dots,L'_n\})\big)\,\mathrm{sub}$
- **Resolutionshülle**: $\mathrm{Res}^*(F)$ analog Aussagenlogik, enthält alle möglichen Resolventen aus F. Diese Menge ist in der Prädikatenlogik evtl. unendlich ($\Rightarrow$ Unentscheidbarkeit).
- **Resolutionssatz d. Prädikatenlogik**: F unerfüllbar $\Leftrightarrow$ man kann $\square$ durch prädikatenlog. Resolution aus F ableiten (d. h. $\square \in \mathrm{Res}^*(F)$).

Alles folgende nicht mehr klausurrelevant (WS19/20).

↓ Nicht mehr klausurrelevant (WS19/20).

- **Grundinstanz** eines Literals L ist ein Literal $L\,\mathrm{sub}$, welches keine Variablen enthält.
- **Grundinstanz** einer Klausel $K = \{L_1,\dots,L_n\}$ ist eine Klausel $K\,\mathrm{sub} = \{L_1\,\mathrm{sub},\dots,L_n\,\mathrm{sub}\}$, welche keine Variablen enthält.
- **Bsp.:** $P(f(f(a)), g(a, f(a), b))$ ist Grundinstanz von $P(f(x), g(a, x, y))$.
- **Lifting-Lemma**: K_1, K_2 prädikatenlog. Klauseln, K'_1, K'_2 jeweils Grundinstanzen, die aussagenlog. resolvierbar sind mit Resolvent R'. $\Rightarrow$ $\exists$ prädikatenlog. Resolvent R von K_1, K_2, sodass R' Grundinstanz von R.

  $$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[d] \arrow[dr, dash] & & K_2 \arrow[d] \arrow[dl, dash] \\ K'_1 \arrow[dr, dash] & R \arrow[d] & K'_2 \arrow[dl, dash] \\ & R' & \end{tikzcd}$$

  —: Resolution
  →: Substitution zu Grundinstanz
- Für Formel H mit freien Variablen $x_1,\dots,x_n$ sei $\forall H := \forall x_1 \dots \forall x_n H$ der **Allabschluss**.
- *Lemma:* Für Klauselform F gilt: $F \equiv \forall F^* \equiv \bigwedge_{K \in F^*} \forall K$.
- *Lemma:* R Resolvent zweier Klauseln K_1, K_2. $\Rightarrow \forall K_1 \wedge \forall K_2 \models \forall R$.