Grundlagen Theoretischer Informatik

Kompaktmerkzettel (Muster)

von Alexander Köster

Student der Universität Siegen, GTI 2017

Letzte Aktualisierung: 26. August 2017

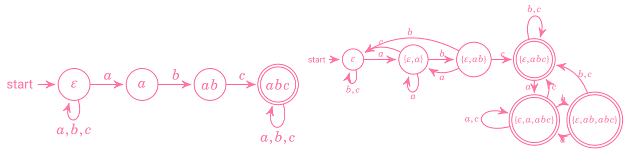
Dieser Kurs der Theoretischen Informatik beschäftigt sich
mit den Eigenschaften von Sprachen und deren Automatenmodellen,
sowie Berechenbarkeit und Berechnungsmodelle, u.a. die bekannte Turing-Maschine.

Einzig für Lernzwecke erstellt.

Diese Zusammenfassung eignet sich nur, wenn man die Themengebiete bereits verstanden und verinnerlicht hat.
Das Nutzen dieses Kompaktmerkzettels ersetzt keine Klausurvorbereitung.
Jeder hat eigene Schwächen. Es ist dringend empfohlen, eigene Kompaktmerkzettel fokussiert auf diese Schwächen zu bauen.
Aus meiner zugehörigen kompletten Zusammenfassung fehlende Elemente, die hier nicht auftauchen, sind niemals weniger relevant:
ich konnte sie mir nur merken und sie daher von diesem Kompaktmerkzettel auslassen!

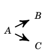
- **Grammatik**: $G=(V,\ \Sigma,\ P,\ S)$
  P : V & W. \ reine W. → V & W.
- **Typ-3** (reg.): $A \to a,\ A \to Ba$, ε-Sonderregel
- **DFA**: $M=(Z,\ \Sigma,\ \delta,\ z_0,\ E)$, **NFA**: $\cancel{z_0} \to S$
- **Potenzmengenkonstruktion** NFA → DFA

Bsp.:

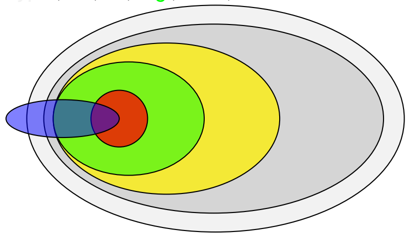


- $M_1 \circ M_2$: $\forall z$ mit $\to \in E_1 + (\to) S_2$
- $M_1 \cup M_2$: nebeneinander → NFA
- M^*: $\forall z$ mit $\to \in E + (\to) S \cup \varepsilon$
- $\overline{M} : \overline{E}$
- $M_1 \cap M_2$: **Kreuzproduktautomat**
  - ▷ NFA mit $Z : (m_1,\ m_2)$ ▷ δ: beide Seiten
  - ▷ $S \vee E$, wenn $a \wedge b$ in ihren M_i in $S \vee E$
- **Pumping-Lemma** (uvw-Th.): f.a.b. n, f. x mit $|x| \geq n$, $|v| \geq 1$, $|uv| \leq n \to$ alle Zerl. $x = uvw$, $\forall$ muss gelten $\exists i:\ uv^iw \notin L$
- **Erkennungsäquivalenz**: in DFA, wenn 2 Z. gefolgt gl. Eingaben immer in gl. Zustand enden
- **Myhill-Nerode-Äq.** $x\ R_L\ y$ wie Erk.äq., aber W.
  - ▷ **Äquiv.kl.**: alle M.-N.-äq. Wörter
  - ▷ $\mathrm{index} R_L$: Anzahl Äq.kl.
- **Minimal-DFA**: Äq.kl. als Z.
  - ▷ treppenf. Tab. vert. v.o.++ \ 1.Z., horiz. v.l.++ \ letzter Z.
  - ▷ mark. Paare mit einem E und einem $\cancel{E}$
  - ▷ mark. Paare mit δ beider = mark. P. (loop)
  - ▷ keine Ä. mgl.: nicht mark. = erk.äq.
- **Leerheit**: sehbar, **Endlichk.**: sehbar (Zyklus)
- **Inklusion**: $T(M_1) \subseteq T(M_2) \Leftrightarrow \left(\overline{T(M_2)} \cap T(M_1)\right) = \emptyset$
- **Äquiv.**: sehbar (min. DFA isomorph)
- **Typ-2** (kf.): $A \to \alpha \in V \cup \Sigma$ n.-verkürzend (+ε)
- **CNF**: nur $A \to a \mid BC$
  - ▷ A_a $\forall a$, alle a ersetzen
  - ▷ Ketten hoch ($A \to B, B \to \alpha \Rightarrow A \to \alpha$)
  - ▷ mehr-V.-P. aufteilen ($A \to A_1A_2 \cdots \Rightarrow A \to A_1B_1$)
- **Pumping-Lemma** ($uvwxy$-Th.): f.a.b. n, f. z mit $|z| \geq n$, $|vx| \geq 1$, $|vwx| \leq n \to$ a.Zerl. $z = uvwxy$, $\forall$ muss gelten $\exists i:\ uv^iwx^iy \notin L$
- $L_1 \cup L_2, L_1L_2, L^*$ kf. abgeschl.
- $L_1 \cap L_2, \overline{L}$ kf. nicht abgeschl., außer L_2 reg.
- Wortp.: **CYK-Alg.** v.Z. A,B s. $X \to AB$ u. S

a	b	c	d	e
$T_{1,1}$	$T_{2,1}$	$T_{3,1}$	$T_{4,1}$	$T_{5,1}$
$T_{1,2}$	$T_{2,2}$	$T_{3,2}$	$T_{4,2}$	
$T_{1,3}$	$T_{2,3}$	$T_{3,3}$		
$T_{1,4}$	$T_{2,4}$			
$T_{1,5}$				

- **nPDA**: $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ mit $\delta : \gamma \mapsto$ l. im W. = ganz o. auf Keller
- **Leerheit**: suche prod.V. W ($\to a$ iw.), $S \in W$?
- **Endlichkeitsproblem**
  - ▷ Graph: $(A \to BC) \in P$ u. $A, B \in W$: 
  - ▷ $|L| = \infty \Leftrightarrow S$ zu A, echt. Zykl. zur. zu A
- **Äq.pr.** und **Schnittpr.** unentscheidbar
- **Typ-1** (ks.): keine verk. Prod., ε-Sonderr.
- **LBA** A = wie TM, ndet. = kf, det. = unbek.
- **Komplement** abgeschl., **Wortpr.** entscheidbar
- **Typ-0** (semi-entsch.): alle G
- **TM**: $M = (Z,\ \Sigma,\ \Gamma,\ \delta,\ z_0,\ \square,\ E)$ (d. = n.d.)
- **Komplement** n. abg., **Wortpr.** nur semi-entsch.

- Sprachklassen:
  Typ-0, ks., kf., reg., endl., unär



- $\exists$ abzählb. viele berechenb. Funkt., überabz. viele Funkt.
- **Loop** enspr. LBA | erlaubt: $x_i := x_j \pm c$, $i = j$ ja | $x_i := x_j + x_k$, $i \neq k$ | $x_i := x_j \cdot x_k$, $i \neq j \neq k$ | $\textsc{If}\ x_i = 0\ \textsc{Then}\ P\ \textsc{End}$
- $\textsc{While}\ x_i \neq 0\ \textsc{Then}\ P\ \textsc{End}$
- **Goto**: $M_1 : P$; $\textsc{If}\ x_i = c\ \textsc{Then}\ \textsc{Goto}\ M_1$; $\textsc{Halt}$
- **prim. rek. F.** $k_m = m$, $\pi_i^k(n_1, \ldots, n_k) = n_i$, $s(n) = n+1$, inein. eins. p.r., Rek.: $f(0, n_1, \ldots)$ Ank., $f(n+1, n_1, \ldots) \to f(n, n_1, \ldots)$
  $\mathrm{add}(a,b)$, $\mathrm{mult}(a,b)$, $\mathrm{dec}(n)$, $\mathrm{sub}(a,b)$
- **Paarungsfunk.** $c(n_1, \ldots, n_k) = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle \in \mathbb{N}$,
  Dekodierung: $d_i(\langle n_1, \ldots, n_k \rangle) = n_i$
- **μ-rek. F.**: prim. rek. + μ-Op.: kl. Nullst. v. 1. Var.
- **char. F.** $\chi_A(w) = 1$ ($w \in A$) o. 0
  wenn berechenb. = Spr. A entsch.
- **halbe char. F.** $\chi'_A(w) = 1$ ($w \in A$) o. undef.
- **rek. aufzählb.** Spr.: Funkt. W. aufz. (⇔ Typ-0)
- **spez. Haltepr.**: Sei M die TM, die das spezielle Halteproblem berechnet. Dann sei M' die TM, die bei Eingabe von w genau dann in eine Endlosschleife geht, wenn M „1" ausgibt, sonst selbst 0 ausgibt. Gibt man in M' nun w' so ein, dass $M_{w'} = M'$, dann müsste sie genau dann halten, wenn sie selbst nicht hält. $\lightning$
- **Reduktion** $B \leq A$: B unentsch. $\Rightarrow A$ unent.
- **S. v. Rice**: unentsch., ob TM Eigenschaft
- **Wurzelgesetze** für $x, y, n, m \in \mathbb{C}$:
  - ▷ $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$ wenn $x \cdot y \geq 0$
  - ▷ $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$
  - ▷ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$
- **Logarithmusgesetze** für $a, b, p, q, n \in \mathbb{C}$
  - ▷ $\log_b b = 1$
  - ▷ $\log_b 1 = 0$
  - ▷ $\log_b(p \cdot q) = \log_b p + \log_b q$
  - ▷ $\log_b \frac{p}{q} = \log_b p - \log_b q$
  - ▷ $\log_b p^n = n \cdot \log_b p$
  - ▷ $\log_b \sqrt[n]{p} = \frac{\log_b p}{n}$
  - ▷ $\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}$
- Gaußsche Summenformel: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$