Universität Siegen Freiwillig erstellte Übung, unabhängig von der Universität

Grundlagen der theoretischen Informatik
(Übungsklausur)

Dozent: Prof. Dr. M. L.
Autor: AKo (Student der GTI)
study.woalk.de

Sommersemester 2017
Dauer: ≈180 Minuten
Revision: 0.2

Erlaubte Hilfsmittel:

- Dokumentenechte Schreibgeräte (kein Bleistift, kein Rot)
- Ein beidseitig handschriftlich beschriebenes DIN-A4-Blatt.

Bitte beachten:

- Tragen Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nr. ein.
- Schreiben Sie in den vorgesehenen Feldern. Sollte der Platz nicht ausreichen, schreiben Sie auf der Rückseite weiter und merken Sie es im Aufgabenfeld an.
- Prüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit aller 10 Seiten (ohne dieses Deckblatt). Die Klammerung der Klausur darf nicht gelöst werden.
- Schreiben Sie deutlich! Uneindeutige Ergebnisse sind ungültig.
- Zum Bestehen dieser Klausur benötigen Sie mindestens 50% der erreichbaren Punkte.
- Ein Täuschungsversuch (Abschreiben, unerlaubte Hilfsmittel, Kommunikation mit anderen Klausurteilnehmern, etc.) führt zum Ausschluss aus der Prüfung. Es erfolgt keine Verwarnung.

Inhaltliche Hinweise:

- Endliche Automaten können wahlweise graphisch oder tabellarisch angegeben werden.
- In LOOP- und WHILE-Programmen dürfen Addition, Multiplikation, Subtraktion (negativ $\to 0$) und die Bedingung $\text{IF } x_i = 0 \text{ THEN } P \text{ END}$ verwendet werden.
- Schreiben Sie zu LOOP- und WHILE-Programmen immer dazu, in welchen Variablen die Eingänge einer Funktion stehen, falls nötig. Die Ausgabe sollte am Ende immer in x_1 stehen.
- Addition und Multiplikation dürfen als primitiv rekursiv vorausgesetzt werden.

Name: ______________________________ Matrikelnummer: ______________

Grundlagen der theoretischen Informatik – Übungsklausur

Punkteübersicht:

	Punkte:	**Bonus:**	**Erreicht:**
Aufgabe 1	10	0	
Aufgabe 2	10	0	
Aufgabe 3	10	0	
Aufgabe 4	5	0	
Aufgabe 5	10	0	
Aufgabe 6	10	0	
Aufgabe 7	10	0	
Aufgabe 8	10	0	
Aufgabe 9	10	0	
Aufgabe 10	5	0	
Aufgabe 11	10	0	
Aufgabe 12	0	10	
Gesamt	100	10	

Aufgabe 1. Fragenteil **Punkte: 10**

(a) (1 Punkt) Für alle Sprachen L gilt: $\left(L^+\right)^+ = L^+$

◯ Wahr ◯ Falsch

(b) (1 Punkt) Zu jedem DFA M mit n Zuständen gibt es einen NFA M' mit höchstens 2^n Zuständen, sodass gilt $T(M) = T\left(M'\right)$.

◯ Wahr ◯ Falsch

(c) (1 Punkt) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Es gilt $\forall w_1, w_2 \in \Sigma: \ w_1 \cdot w_2 \in L \Rightarrow w_1, w_2 \in L$.

◯ Wahr ◯ Falsch

(d) (1 Punkt) Es gibt nicht-reguläre Sprachen, die die Eigenschaften des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen erfüllen.

◯ Wahr ◯ Falsch

(e) (1 Punkt) Unäre kontextfreie Sprachen sind immer regulär.

◯ Wahr ◯ Falsch

(f) (1 Punkt) Es gibt einen nicht-deterministischen Kellerautomaten M, zu dem kein deterministischer Kellerautomat M' mit $T(M) = T\left(M'\right)$ existiert.

◯ Wahr ◯ Falsch

(g) (1 Punkt) Semi-entscheidbare Sprachen (Typ-0) sind rekursiv aufzählbar.

◯ Wahr ◯ Falsch

(h) (1 Punkt) Es gibt eine berechenbare, partielle primitiv rekursive Funktion.

◯ Wahr ◯ Falsch

(i) (1 Punkt) Seien f und g primitiv rekursive Funktionen. Dann ist $f \circ g$ ebenfalls primitiv rekursiv.

◯ Wahr ◯ Falsch

(j) (1 Punkt) Sei die Sprache A reduzierbar auf die Sprache B. Dann ist A genau dann entscheidbar, wenn B entscheidbar ist.

◯ Wahr ◯ Falsch

Aufgabe 2. Sei $L = \left\{w \in \{a,b\}^+ \;\middle|\; \text{das erste und letzte Zeichen von } w \text{ sind verschieden}\right\}$.

(a) (2 Punkte) Geben Sie einen regulären Ausdruck für L an.

(b) (5 Punkte) Geben Sie einen DFA M mit $T(M) = L$ an.
Begründen Sie kurz in Stichworten, warum Ihr Automat korrekt ist.

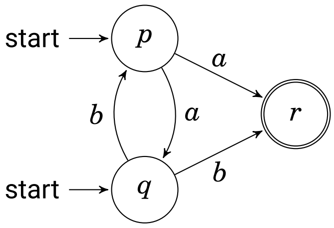
(c) (3 Punkte) Geben Sie eine reguläre Grammatik G mit $L(G) = L$ an.

Aufgabe 3. Sei L die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\{a,\ b\}$, deren Länge ungerade ist und deren mittleres Zeichen ein a ist, also: $L = \{w_1 a w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a, b\}^* \wedge |w_1| = |w_2|\}$

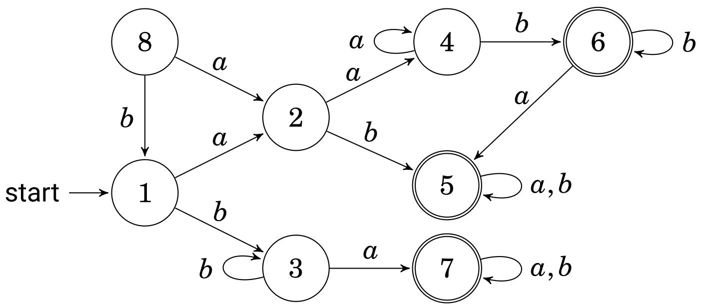
(a) (8 Punkte) Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass L nicht regulär ist.

(b) (2 Punkte) Erklären Sie mit dem Satz von Myhill-Nerode, warum L nicht regulär ist.

Aufgabe 4. (5 Punkte) Gegeben sei der folgende NFA M. Konstruieren Sie mit Hilfe der Potenzmengenkonstruktion einen zu M äquivalenten DFA.



Aufgabe 5. Gegeben sei der folgende DFA M: **Punkte: 10**



(a) (7 Punkte) Minimieren Sie M algorithmisch. Geben Sie in Ihrer Tabelle an, in welcher Reihenfolge Sie vorgegangen sind.

(b) (3 Punkte) Welche Sprache akzeptiert M?

Aufgabe 6. (10 Punkte) Sei $L = \{a^m b^n c^{m+n} \mid m,n \geq 0\}$. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an mit $L(G) = L$. Begründen Sie, warum Ihre Grammatik tatsächlich die Sprache L erzeugt.

Aufgabe 7. Gegeben sei die folgende kontextfreie Grammatik. **Punkte: 10**

$$G = (\{S,A,B\},\ \{a,b,c\},\ P,\ S)$$

$$\begin{aligned} P = \{&S \to A \mid B, \\ &A \to aAc \mid aBc, \\ &B \to bBc \mid bc \quad \} \end{aligned}$$

(a) (7 Punkte) Wandeln Sie die Grammatik G in eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform um. Gehen Sie schrittweise vor.

(b) (3 Punkte) Welche Sprache akzeptieren G und G'?

Aufgabe 8. (10 Punkte) Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^m b^n c^{mn} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 9. (10 Punkte) Konstruieren Sie eine Turing-Maschine, die bei Eingabe eines Wortes $w \in \{0,\ 1\}^*$ das gespiegelte Wort w^{R} auf das Band schreibt, den Kopf auf das erste Symbol dieses Wortes stellt und in einen Endzustand übergeht. Erklären Sie die Idee hinter ihrer Konstruktion.

Aufgabe 10. (5 Punkte) Schreiben Sie ein WHILE-Programm, das die charakteristische Funktion der geraden natürlichen Zahlen berechnet.

Geben Sie an, in welchen Variablen die Eingabe steht. Die Ausgabe sollte am Ende in x_1 stehen.

Aufgabe 11. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine totale μ-rekursive Funktion. **Punkte: 10**

Zeigen Sie, dass auch die folgenden Funktionen (I) μ-rekursiv und (II) total sind:

(a) (5 Punkte) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die jedem $n \in \mathbb{N}$ das Maximum der Zahlen $f(0), \ldots, f(n)$ zuordnet.

(b) (5 Punkte) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl m zuordnet, sodass $f(m)$ das Maximum der Zahlen $f(0), \ldots, f(n)$ ist.

Aufgabe 12. (10 Bonuspunkte) Beweisen Sie die Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems (Sprache $K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ angesetzt auf } w \text{ hält}\}$). Dabei stellt M_w die Turing-Maschine dar, die durch das Wort w kodiert wird (abgespielt durch eine universelle Turing-Maschine).