Analysis II

Alexander Köster, *Student der Universität Siegen*

4. August 2018

Eine Zusammenfassung des Vorlesungs- und Übungsstoffes einiger Themen der Analysis.

Eine Sammlung einiger Inhalte der Veranstaltungen der Analysis 2 im Sommersemester 2018 der Universität Siegen mit den wichtigsten Beweisen für Prüfungen..
Besonders wichtige Einträge wurden in lila geschrieben.

Diese Sammlung wurde unabhängig von der Universität erstellt. Alles aus der Vorlesung, dem zugehörigen Skript und den zugehörigen Übungen, was nicht in dieser Zusammenfassung enthalten ist, ist dennoch wichtig für das Verständnis oder den Beweis der gegebenen Sätze.
Jeder Dozent kann andere Prioritäten setzen und in jeder Prüfung andere Themen abfragen. Die Wichtigkeit, die ich diesen Sätzen und Beweisen gegeben habe, reflektiert nur meine Ansicht als grobe Abschätzung. In meinen Augen reicht ein ca. 90%-iges komplettes Verständnis mit der Fähigkeit, all diese 90% auswendig auf Anfrage abspulen zu können dafür, eine mündliche Prüfung in Analysis II mit 1,0 zu bestehen. Für ein gutes Abschließen reichen ca. 50% sowie die Fähigkeit, unter Hilfestellung auf 80% zu kommen.

Auf keinen Fall sollte dieses Dokument als Klausurformelsammlung verwendet werden, falls eine solche erlaubt ist! Das Erstellen einer eigenen Zusammenfassung ist ein wichtiger Schritt, um die Wichtigkeit und den Inhalt des Stoffes erst richtig zu verstehen. Es sollte eine eigene Sammlung erstellt werden, die nur das Nötigste enthält, um eigene Schwächen auszubessern. Dieses Dokument enthält viel mehr, als für eine Klausurzusammenfassung sinnvoll ist, da man den Überblick verliert.

Inhaltsverzeichnis

5 Eindimensionale Differentialrechnung

5.1 Ableitungen

Beispiel 5.1.1: Differenzierbarkeit von Polynomen

a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n \Rightarrow f_n'(x) = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$
$\Rightarrow$ Alle Monome und damit alle Polynome sind diffbar.

b) $f(x) := e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Beweis:

Seien $x, h \in \mathbb{R}$. Betrachte:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \frac{e^h-1}{h}$$

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}-1\right) = \frac{1}{h}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!}-1\right) = \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{(n+1)!}$$
$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{(n+1)!} =: g(h)$$

Gesucht: $\lim\limits_{h\to 0} g(h)$

Sei $h \in [-1,1]$. Dann: $\left|\frac{h^n}{(n+1)!}\right| \le \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$ konvergiert.

$\overset{\text{Weierstraß}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{(n+1)!}$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf $[-1,1]$. $\Rightarrow g$ stetig auf $[-1,1]$.

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} g(h) = g\left(\lim_{h\to 0} h\right) = g(0) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^n}{(n+1)!} = 1$$
$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(e^x \cdot g(h)) = e^x \cdot \lim_{h\to 0} g(h) = e^x \cdot 1 = e^x$$

□

e^x ist die einzige Funktion mit der Eigenschaft, ihre eigene Ableitung zu sein (außer Vielfache).

c) $f(x) := \arcsin x \overset{x\notin\{-1,1\}}{\Longrightarrow} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Beweis:

Aus Definition folgt: $\sin(\arcsin(x)) = x \Rightarrow 1 = \underbrace{\sin'(\arcsin(x))}\cdot \arcsin'(x)$

$$\sin'(\arcsin(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\left(\sin^2(\arcsin(x))\right)} = \sqrt{1-x^2}$$

$\overset{x\notin\{-1,1\}}{\Longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin'(x)$ □

Für $x \in \{-1,1\}$ ist arcsin nicht diffbar.

d) $f(x) := \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ für $x \neq \frac{2n+1}{2}\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.
$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x)-\sin(x)\cos'(x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$

Liste wichtiger Ableitungen:

$f(x)$	x^n	e^x	$\log x = \ln x$	$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$f'(x)$	$\underbrace{nx^{n-1}}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$

für $n \in \mathbb{R}$ (Definitionsbereich beachten!)

Definition 5.1.2: Stetige Differenzierbarkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ diffbar und $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt f **stetig differenzierbar**.
Der Raum aller n-mal stetig diffbaren Funktionen auf D wird mit $\mathrm{C}^{(n)}(D)$ bezeichnet.
Es gilt: $\mathrm{C}(D) = \mathrm{C}^{(0)}(D)$. Es ist $\mathrm{C}^{(0)}(D) \supset \mathrm{C}^{(1)}(D) \supset \mathrm{C}^{(2)}(D) \supset \ldots$ (siehe dazu später).

5.2 Zentrale Sätze

Satz 5.2.1: Satz von Rolle

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine auf $]a,b[$ diffbare und auf $[a,b]$ stetige Funktion, und es gelte $f(a) = f(b)$.
Dann gilt: $\exists \xi \in\,]a,b[: f'(\xi) = 0$

Beweis zu 5.2.1:

Ist f konstant, so ist die Aussage klar ($f' = 0$).
Es existiere also ein $x_1 \in\,]a,b[$, sodass $f(x_1) \neq f(a)$. O.B.d.A. sei $f(x_1) > f(a)$ (sonst betrachte hier $-f$).
f ist stetig auf Kompaktum $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : f(\xi) \geq f(x)\ \forall x \in [a,b]$.

$$f(\xi) \geq f(x_1) > f(a) = f(b)$$
$$\Rightarrow \xi \neq a,\ \xi \neq b \Rightarrow \xi \in\,]a,b[$$

Was ist mit der Ableitung?

$$\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} = \begin{cases} \leq 0 & h > 0 \\ \geq 0 & h < 0 \end{cases}$$

Da nach Voraussetzung f diffbar ist und damit der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$ existiert, muss gelten:

$\Rightarrow f'(\xi) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = 0$ □

Satz 5.2.2: Mittelwertsatz der Differentialrechnung („MWS Diff")

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ diffbar.

(1) **„1. MWS Diff"**

$$\Rightarrow \exists \xi \in\,]a,b[: \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{Sekantensteigung}} = f'(\xi)$$

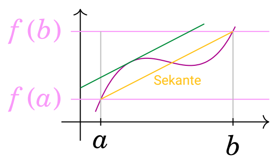
Beispiel: Eine durchschnittliche Geschwindigkeitsmessung impliziert, dass ein Auto diese Geschwindigkeit irgendwo im Messintervall mal gefahren sein muss.

(2) **„2. MWS Diff"**
Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ diffbar, $g'(x) \neq 0\ \forall x \in\,]a,b[$.

$$\Rightarrow \exists \xi \in\,]a,b[: \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Beweis zu 5.2.2:

(1) $h(x) := f(x) - \underbrace{\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\in\mathbb{R}} \cdot x}_{\text{Monom}}$ $\rightarrow$ Komposition stetiger Funktionen



h ist stetig auf $[a,b]$, diffbar auf $]a,b[$.

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} a = \frac{f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a}{b-a} = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a}$$

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)b - f(b)a - f(b)b + f(a)b}{b-a} = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} = h(a)$$

$$\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists \xi \in]a,b[: h'(\xi) = 0$$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow 0 = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ (genau der MWS Diff)

□

(2) Nach (1) wissen wir: $\exists \tilde{\xi} \in]a,b[: 0 \neq g'(\tilde{\xi}) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$
$\Rightarrow g(a) \neq g(b) \Rightarrow$ linker Nenner im 2. MWS $\neq 0$
$h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g(x)$
Ab hier analog (1).

□

Korollar 5.2.3:

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und diffbar auf $]a,b[$ und stetig auf $[a,b]$.

(i) $f'(x) = 0 \ \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ konstant
(ii) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ monoton steigend
(iii) $f'(x) > 0 \ \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ streng monoton steigend
(iv) $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ monoton fallend
(v) $f'(x) < 0 \ \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ streng monoton fallend
(vi) f' beschränkt $\Rightarrow f$ Lipschitzsch

Beweis zu 5.2.3:

ii) Seien $x, y \in [a,b]$ beliebig, $x \neq y$, o.B.d.A. $x < y$. $\Rightarrow f|_{[a,b]}$ stetig auf $[x,y]$ und diffbar auf $]x,y[$
$\Rightarrow \exists \xi \in]x,y[\subset]a,b[: 0 \leq f'(\xi) \overset{\text{MWS}}{=} \frac{(y)-f(x)}{x-y}$
$f(y) - f(x) > 0 \Rightarrow f$ monoton steigend.

□

vi) Seien $x, y \in [a,b]$ beliebig, $x \neq y$, o.B.d.A. $x < y$. f' beschränkt.
$\exists \gamma(\cancel{x}, \cancel{y}) \in \mathbb{R} : \forall z \in]a,b[: \ |f'(z)| < \gamma$
$\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \exists \xi \in]x,y[: \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi)$
$\Rightarrow |f(y) - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |y-x| \leq \gamma |y-x| \Rightarrow \gamma$ ist Lipschitzkonstante von f.

□

Definition 5.2.4: Umgebung

(i) $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Umgebung** von
  a) $a \in \mathbb{R}$, falls eine ε-Umgebung $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ existiert, sodass $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq U$
  b) $+\infty$, falls ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $]a, +\infty[\subseteq U$
  c) $-\infty$, falls ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $]-\infty, a[\subseteq U$
(ii) $U \in \mathbb{R}$ heißt **linksseitige** bzw. **rechtsseitige Umgebung** von $a \in \mathbb{R}$, falls

$$\exists \varepsilon > 0 :]a-\varepsilon,\ a] \subseteq U \text{ bzw. } [a,\ a+\varepsilon[\subseteq U$$

(iii) $U \in \mathbb{R}$ heißt **punktierte Umgebung** von a, falls eine ε-Umgebung $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ existiert, sodass $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \subseteq U$. Analog sind punktierte links-/rechtsseitige Umgebungen von a definiert.

Satz 5.2.5: L'Hôpital'sche Regel

Voraussetzung: Seien f,g auf einer (punktierten) (links-/rechtsseitigen) Umgebung U von $a \in \overline{\mathbb{R}}$ definiert und differenzierbar $g'(x) \neq 0$ in U. Sei ferner für $x \to a^{(+/-)}$:

I) $f(x) \longrightarrow 0, \; g(x) \longrightarrow 0$

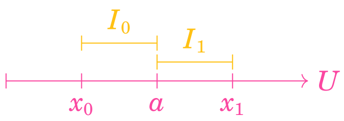
II) $f(x) \longrightarrow \pm\infty, \; g(x) \longrightarrow \pm\infty$ (alle 4 Kombinationen)

Behauptung: Wenn $\lim\limits_{x\to a^{(+/-)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: A \in \overline{\mathbb{R}}$ existiert, dann existiert $\lim\limits_{x\to a^{(+/-)}} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim\limits_{x\to a^{(+/-)}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Beweis zu 5.2.5:

(exemplarisch für $x \to a \in \mathbb{R}$ und Fall I))

Sei (x_n) beliebige Folge in U mit $x_n \longrightarrow a, \; x_n \neq a \; \forall n$. Setze f und g auf a stetig fort durch $f(a) := 0 =: g(a)$ (darf man wegen Voraussetzung von I)). Sei $I_n := [\min\{x_n, a\}, \max\{x_n, a\}]$.



$\Rightarrow f,g$ sind stetig auf I_n, diffbar auf $\mathring{I}_n$ (Inneres) , $g'(x) \neq 0$ auf $\mathring{I}_n$.

$$\overset{\text{2. MWS Diff}}{\Longrightarrow} \exists \xi_n \in \mathring{I}_n : \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \frac{\overbrace{f(a)}^{=0} - f(x_n)}{\underbrace{g(a)}_{=0} - g(x_n)}$$

Da $\xi_n \in \mathring{I}_n$, ist $0 \le |\xi_n - a| \le |x_n - a| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \overset{\text{Sandwich}}{\Longrightarrow} \xi_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

Da $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: A$ existiert, ist $A = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$.

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \text{ und } \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = A$$

□

Beispiel 5.2.6: L'Hôpital

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$; $f(x) := \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$

$g(x) := \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x)$ existiert und $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$ existiert.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{ax}}$; $a > 0, \; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \; f(x) := x^n, \; g(x) := e^{ax} \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}, \; g'(x) = ae^{ax}$

$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x\to\infty} ? \; „\frac{\infty}{\infty}"$ Deswegen leiten wir weiter ab:

$$f^{(n)}(x) = n!, \; g^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n!}{a^n e^{ax}} = 0$ existiert

$\overset{\text{L'Hôpital}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = 0$ existiert $\overset{\text{L'Hôpital}}{\Longrightarrow} \dots \overset{\text{L'Hôpital}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ existiert

Satz 5.2.7: Satz von Taylor

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ und $(n+1)$-mal diffbar; $x_0,x\in[a,b]$ mit $x_0\neq x$.
$\Rightarrow \exists\xi\in\,]\min\{x_0,x\},\ \max\{x_0,x\}[:\ f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n,\xi}(x)$, d.h.:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_{n,\xi}(x)$$

mit (z.B.) $R_{n,\xi}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (Restglied von Lagrange)

Das Restglied entspricht dem Fehler bei der Taylorentwicklung. Für eine beliebig oft diffbare Funktion f, für die $R_{n,\xi}(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$ konvergiert, konvergiert das Taylorpolynom zur Taylorreihe, und ist die Potenzreihenentwicklung dieser Funktion (wegen dem Identitätssatz für Potenzreihen eindeutig).

Beweis zu 5.2.7:

Seien x,x_0 fest , $I:=[\min\{x_0,x\},\max\{x_0,x\}]$, $F,G:I\to\mathbb{R}$ seien definiert durch

$$F(y):=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k;\quad G(y):=(x-y)^{k+1}$$

F,G sind stetig auf I, diffbar auf $\mathring{I}$.

$$G'(y)=(n+1)(x-y)^n\cdot(-1)\neq 0\quad\forall y\in\mathring{I}\ (\text{d.h. } y\neq x)$$

$$\overset{\text{2. MWS Diff}}{\Longrightarrow}\ \exists\xi\in\mathring{I}:\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

Beachte: $F(x)=f(x)$, $F(x_0)$ ist Taylorpolynom an Stelle x; $G(x)=0, G(x_0)=(x-x_0)^{n+1}$

$$F'(y)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}(x-y)^k+\frac{f^{(k)}(y)}{k!}\underbrace{k(x-y)^{k-1}}_{=0\text{ für }k=0}\cdot(-1)\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!}(x-y)^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!}(x-y)^{k-1}\quad k\text{ kürzt sich}$$

Index shift

$$=\frac{f^{(n-1)}(y)}{n!}(x-y)^n$$

Also gilt:

$$F(x)-F(x_0)=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}(G(x)-G(x_0))$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\cdot\frac{-(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-\xi)^n\cdot(-1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

□

Definition 5.2.8: Extrema

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. f hat in $x_0\in\,]a,b[$ ein **lokales** $\left|\begin{matrix}\textbf{Minimum}\\ \textbf{Maximum}\end{matrix}\right|$, falls ein $\varepsilon>0$ existiert, sodass $\left|\begin{matrix}f(x_0)\le f(x)\\ f(x_0)\ge f(x)\end{matrix}\right|$ $\forall x$ mit $|x-x_0|<\varepsilon$ gilt.

Oberbegriff für Max. und Min. ist **Extremum**. x_0 heißt **extremal** oder **lokaler** $\left|\begin{matrix}\textbf{Minimierer}\\ \textbf{Maximierer}\end{matrix}\right|$.

Satz 5.2.9: Extrema durch Ableitungen

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar.

(i) Wenn $x_0 \in]a,b[$ extremal, so ist $f'(x_0) = 0$.

(ii) Wenn $f \in C^{(2)}[a,b]$ *und* $f'(x_0) = 0$, so gilt:

a) Wenn $f''(x_0) > 0$, so ist f in x_0 lokal minimal.

b) Wenn $f''(x_0) < 0$, so ist f in x_0 lokal maximal.

(iii) Wenn $f \in C^{(3)}[a,b]$ und $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, aber $f'''(x_0) \neq 0$, so hat f bei x_0 kein Extremum. x_0 heißt dann **Sattelpunkt**.

Beweis zu 5.2.9:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar und $x_0 \in]a,b[$ extremal.

(i) Seien $(y_n), (z_n)$ Folgen mit $y_n < x_0 < z_n \; \forall n$ und $y_n \longrightarrow x_0, \; z_n \longrightarrow x_0$.

Variante 1: Minimum, Variante 2: Maximum

$$f'(x_0) \underset{\text{Def.}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(y_n)-f(x_0)^{\geq 0 \;\leq 0}}{y_n - x_0 \;\; {\scriptstyle <0}} & \Big\} {\scriptstyle \leq 0 \atop \geq 0} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(z_n)-f(x_0)^{\geq 0 \;\leq 0}}{z_n - x_0 \;\; {\scriptstyle >0}} & \Big\} {\scriptstyle \leq 0 \atop \geq 0} \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$ (vgl. Satz von Rolle)

□

(ii) Umgekehrt gilt (i) nicht immer: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = 0$, aber kein Extremum in 0.

Also: Zusätzliche Bedingungen!

Sei f 2-mal diffbar, $f'(x_0) = 0$.

Taylor ($n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$): Sei $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$.

$$\exists \xi_x \in]\min\{x_0,x\}, \max\{x_0,x\}[: f(x) = f(x_0)\frac{1}{1} + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1}_{=0} + \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f''(\xi_x)\underbrace{\frac{(x-x_0)^2}{2}}_{>0}$$

Also Größenvergleich von $f(x)$ und $f(x_0)$ möglich, wenn $f''(\xi_x)$ bekannt. Für *lokale* Extrema reicht $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, dann ist auch $\xi_x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ (muss ja zwischen x_0 und x liegen).

Gilt $\left| \begin{matrix} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{matrix} \right| \stackrel{!}{\Rightarrow} \left| \begin{matrix} f''(\xi_x) > 0 \\ f''(\xi_x) < 0 \end{matrix} \right|$?

Zusatzvoraussetzung: $f \in C^{(2)}[a,b]$, d.h. f'' stetig.

$f''(x_0) \neq 0$ und f'' stetig $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : f''(x) \neq 0 \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$, genauer: $\left| \begin{matrix} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{matrix} \right|$, f'' stetig $\stackrel{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon > 0$: $\left| \begin{matrix} f''(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \end{matrix} \right| \; \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$

Somit: Wenn $\left| \begin{matrix} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{matrix} \right|$, dann $\exists \varepsilon > 0$, sodass $f(x) = f(x_0) + \underbrace{f''(\xi)}_{\left| {> 0 \atop < 0} \right|} \frac{(x-x_0)^2}{2} \left| \begin{matrix} > f(x_0) \\ < f(x_0) \end{matrix} \right| \; \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$.

□

(iii) Taylor, wobei o.B.d.A. $f'''(x_0) > 0$ (sonst Vorzeichen umdrehen). Sei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sodass $f'''(x) > 0 \; \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$.

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^2}_{=0} + \underbrace{\frac{f'''(\xi_x)}{3!}}_{>0} \cdot \underbrace{(x-x_0)^3}_{{>0 \text{ für } x > x_0 \atop <0 \text{ für } x < x_0}} \quad \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$$

$\Rightarrow$ kein lokales Extremum.

□

Bemerkung 5.2.10:

Allgemein gilt, wenn $f \in C^{(n+1)}[a,b]$, $f'(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$, $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$:

a) Ist $n+1$ gerade, so gilt:
 (a.1) $f^{(n+1)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ lokales Maximum bei x_0
 (a.2) $f^{(n+1)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ lokales Minumum bei x_0

b) Ist $n+1$ ungerade, so liegt kein lokales Extremum bei x_0 vor (x_0 Sattelpunkt).

Beweis zu 5.2.10:

a) Sei $n+1$ gerade, d.h. $\exists m \in \mathbb{N} : n+1 = 2m$.

Taylor: Für $x \in [a,b]$ $\exists \xi \in]\min\{x,x_0\}, \max\{x,x_0\}[$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
$$= f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \overbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}^{=0}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
$$= f(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (*)$$

Aus $f^{(n+1)}$ stetig und $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ folgt:

$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0) : f^{(n+1)}(x) \neq 0$, genauer:

Wenn $\left| \begin{array}{l} f^{(n+1)}(x) > 0 \\ f^{(n+1)}(x) < 0 \end{array} \right|$, dann $\exists \varepsilon > 0$, sodass mit $\xi \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$:

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} f(x) = f(x_0) + \underbrace{f^{(n+1)}(\xi)}_{\left|\begin{array}{c} >0 \\ <0 \end{array}\right|} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}^{\text{immer } \geq 0, \text{ da } n+1 \text{ gerade.}}$$

und somit $\left| \begin{array}{l} f(x) \geq f(x_0) \\ f(x) \leq f(x_0) \end{array} \right|$ $\forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$. Damit ist x_0 ein lokales $\left| \begin{array}{c} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{array} \right|$.

b) Sei $n+1$ ungerade. Sei dabei o.B.d.A. $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ (sonst Vorzeichen wechseln), und ähnlich wie oben sei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sodass $f^{(n+1)}(x) > 0$ $\forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ ist.

Taylor: Für $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ $\exists \xi \in]\min\{x,x_0\}, \max\{x,x_0\}[\subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
$$= \underbrace{f(x_0)}_{>0} + \sum_{k=1}^{n} \overbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}^{=0}(x-x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}_{>0} \underbrace{(x-x_0)^{n+1}}_{\substack{>0 \text{ für } x>x_0 \\ <0 \text{ für } x<x_0}}$$

$$\Rightarrow f(x) \begin{cases} > f(x_0) & x > x_0 \\ < f(x_0) & x < x_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Es liegt bei x_0 kein Extremum vor. Wegen dem Vorzeichenwechsel (echt kleiner $\to$ echt größer) ist x_0 ein Sattelpunkt.

□

Beispiel 5.2.11:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2,\ f'(x)=2x,\ f''(x)=2\ \forall x\in\mathbb{R}$
$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ **notwendig** für Extremum, d.h. $x_0=0$ ist ein Kandidat für Extremum.
Hinreichend: $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0$, hier: $f''(0)=2>0\Rightarrow$ lokales Minimum bei 0.

b) ...

Satz 5.2.12:

e ist irrational.

Beweis zu 5.2.12:
Annahme: $\exists m,n\in\mathbb{N}: e=\frac{m}{n}$
Sei $p\in\mathbb{N}$, sodass $e<p$ (Archimedes). o.B.d.A. $n>p$ (bei Bedarf, Bruch erweitern).
Klar: $p>2$ $(e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots>2)$.
Taylor ($f=\exp,\ x=1,\ x_0=0$):

$$\exists\xi\in]0,1[:\ \frac{m}{n}=\exp(1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k+\frac{\exp^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{e^0}{k!}+\frac{e^\xi}{(n+1)!}\quad \|\cdot n!$$

$$\Rightarrow \underbrace{m\cdot(n-1)!}_{\in\mathbb{Z}}=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{n!}{k!}}_{\in\mathbb{Z}}}_{\in\mathbb{Z}}+\frac{e^\xi}{n+1}\Rightarrow\frac{e^\xi}{n+1}\in\mathbb{Z}\ \text{(genauer: in } \mathbb{N}\text{, da } e^x>0)$$

Es gilt: $0<\xi<1\Rightarrow 1=e^0<e^\xi<e^1=e$ (Monotonie von exp)
Aus o.B.d.A.-Bedingung: $n+1>p+1\Rightarrow 0<\frac{e^\xi}{n+1}<\frac{e}{p+1}<1$
$\lightning$ dazu, dass zwischen 0 und 1 keine natürliche Zahl liegt. □

5.3 Folgen und Reihen von Funktionen II

Bemerkung 5.3.1: Differentiation in $\mathbb{C}$

$f:G\to\mathbb{C}$ mit $G\subseteq\mathbb{C}$ offen, in $z_0\in G$ diffbar, falls

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\ \text{existiert}\ \big(=: f'(z_0)\big)$$

(d.h. in komplexer Metrik: $d(z,w)=|z-w|=\sqrt{(z-w)(\overline{z}-\overline{w})}$)

Klar ist: f in $x_0\in\mathbb{R}$ komplex diffbar $\Rightarrow f$ in x_0 (reell) diffbar ($h\to 0,\ h\in\mathbb{C}$ beinhaltet $h\to 0,\ h\in\mathbb{R}$)

Beispiel 5.3.2: Komplex und reell diffbar

a) $f(z)=z^2,\quad \frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{(z+h)^2-z^2}{h}=\frac{z^2+2hz+z^2-z^2}{h}=2z+h\xrightarrow{h\to 0}2z\Rightarrow f$ komplex diffbar, $f'(z)=2z$

b) $f(z)=|z|$. Sei $z_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\ z_0=re^{i\varphi},\ r>0,\ \varphi\in[-\pi,\pi[$
$f(z_0+h)-f(z_0)=|z_0+h|-|z_0|$
Spezielle Annäherung für $h\to 0$: $z_0+h_n:=re^{i(\varphi+\frac{1}{n})}$
Andere Annäherung: $z_0+\tilde{h}_n:=\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i\varphi}$ d.h. $\tilde{h}:=-\frac{1}{n}re^{i\varphi}$
$\Rightarrow f$ in **keinem** $z_0\in\mathbb{C}$ komplex diffbar. Aber: f in $z_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ reell diffbar, nur in $z_0=0$ nicht.

Also: reell diffbar $\not\Rightarrow$ komplex diffbar.

Satz 5.3.3: Satz über gliedweise Differentiation

Sei $P(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r>0$.
Damit ist P im Inneren des Konvergenzkreises, d.h. $\forall z\in\mathbb{C}: |z-z_0|<r$, (komplex) diffbar, und es gilt:

$$P'(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\left((z-z_0)^k\right)'=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cdot k\cdot (z-z_0)^{k-1}$$

P' hat ebenfalls Konvergenzradius r.
Somit ist P im Inneren des Konvergenzkreises beliebig oft diffbar.

Beispiel 5.3.4: Gliedweise Differentiation

$P(z):=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$, Konvergenzradius $r=1$.

$P'(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\frac{z^{n-1}}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n=\frac{1}{1-z}$ (geometrische Reihe)

Beachte: Konvergenz/Divergenz am Rand des Konvergenzkreises
z.B. P : Divergent bei $z=1$ (harm. Reihe), Konvergent bei $z=-1$ (Leibniz); P' divergent bei $z=\pm1$
d.h.: Randeigenschaften übertragen sich *nicht*.

Satz 5.3.5: Lokale Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe

Sei $f:]a,b[\to\mathbb{R}$, $(a<b)$, beliebig oft diffbar und $x_0\in]a,b[$.
f heißt **lokal bei $x_0\in\mathbb{R}$ in eine Potenzreihe entwickelbar**, wenn f eingeschränkt auf eine ε-Umgebung von x in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Es gilt:

(i) Falls $K,\delta\in\mathbb{R}^+$ existieren, sodass $\left|f^{(n)}\right|\le K\ \forall n\in\mathbb{N}_0,\ x\in]a,b[$ mit $|x-x_0|\le\delta$, so ist f bei x_0 lokal in eine Potenzreihe entwickelbar, für die der Konvergenzradius $\ge\delta$ ist.
(d.h. $\exists(a_k): \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k=f(x)\ \forall x\in\mathcal{U}_\delta(x_0)$)

(ii) Falls es ein $r\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ gibt, sodass $f^{(r)}=f$, so ist f bei x_0 lokal in eine Potenzreihe entwickelbar.

(iii) (Verallgemeinerung von (ii))
Falls es ein $r\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ und reelle Zahlen $a_0,\dots,a_{r-1}$ gibt, sodass $f^{(r)}=\sum_{j=0}^{r-1} a_j f^{(j)}$, dann ist f lokal bei x_0 in eine Potenzreihe entwickelbar.

Diese Potenzreihe ist in allen drei Fällen gegeben durch die **Taylorreihe**:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Beweis zu 5.3.5:

(i) Taylor: $\left|R_{n,\xi}(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le \underbrace{K\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}}_{\substack{\text{unabh. von } x\\ \Rightarrow \text{ glm. Konv.}}}\xrightarrow{n\to\infty} 0.$

$$\overset{|x-x_0|<\delta}{\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}} f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)+0$$

(ii) $f^{(r)}=f\Rightarrow f^{(r+k)}=f^{(k)}\ \forall k\in\mathbb{N}.\qquad (*)$
Sei $\delta>0$, jedoch so, dass $[x_0-\delta,\ x_0+\delta[\subseteq]a,b[$.
Sei $M_i:=\max\limits_{x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta]}\left|f^{(i)}(x)\right|$ für $i\in\underline{r-1}$ (stetige Funktion auf Kompaktum).
$\underset{(*)}{\Longrightarrow}\left|f^{(m)}(x)\right|\le\max(M_0,\dots,M_{r-1})=:M\ \forall m\in\mathbb{N},\forall x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$, siehe (i).

(iii) Analog (ii) (nur mehr Schreibaufwand).

□

Nicht jede $\mathrm{C}^{(\infty)}$-Funktion ist (lokal) in eine Potenzreihe entwickelbar (d.h. analytisch)!

Beispiel 5.3.6:

Sei $$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, f stetig in 0

$f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0 \Rightarrow f'(0) = 0$ und $\lim\limits_{h \to 0} f'(x) = 0$.

Allgemein: $f^{(n)}(x) := \frac{P(x)}{Q(x)} e^{-1/x^2}$; P, Q Polynome, $x \neq 0$ und $f^{(n)}$ (induktiv) und $f^{(n)}(0) = 0$ und $f^{(n)}(x) \xrightarrow{x \to 0} 0$.

$\Rightarrow f \in \mathrm{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$, d.h. beliebig oft diffbar, aber Taylorreihe um 0 wäre identisch 0 (∞ Nullstellen).

$\Rightarrow f$ ist nicht in 0 lokal in eine Potenzreihe entwickelbar, d.h. in keinen noch so kleinen Umgebungen.

(**Beachte:** Aus „$f'(x)$, $x \neq x_0$ gegeben“ und „$\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existiert“ folgt nicht generell die Diffbarkeit von f in x_0.)

6 Das Riemann-Integral in $\mathbb{R}^1$

6.1 Definition & einfache Eigenschaften

Definition 6.1.1: Zerlegung und Riemann-Summen

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt, $I:=[a,b]$, $a<b$.
$Z^{(n)}:=\left\{x_0^{(n)},\, x_1^{(n)},\, \dots,\, x_n^{(n)}\right\}$ sei **Zerlegung** von I, d.h. $a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\dots<x_n^{(n)}=b$.

Für $j\in \underline{n}$ seien:

- $I_j^{(n)}:=\left[x_{j-1}^{(n)},\, x_j^{(n)}\right]$
- $m_j^{(n)}:=\inf\limits_{x\in I_j^{(n)}} f(x)$
- $M_j^{(n)}:=\sup\limits_{x\in I_j^{(n)}} f(x)$
- $l_j^{(n)}:=\left|I_j^{(n)}\right|=x_j^{(n)}-x_{j-1}^{(n)}$

Seien $m:=\inf\limits_{x\in I} f(x);\ M:=\sup\limits_{x\in I} f(x);\ \hat{M}:=\sup\limits_{x\in I}|f(x)|$.

Riemann-Untersumme: $s\left(Z^{(n)}\right):=\sum\limits_{j=1}^{n} m_j^{(n)} l_j^{(n)}$

Riemann-Obersumme: $S\left(Z^{(n)}\right):=\sum\limits_{j=1}^{n} M_j^{(n)} l_j^{(n)}$

Betrachtet werden muss nun für *jedes* $n\geq n_0\in\mathbb{N}$ *jede* Zerlegung $Z^{(n)}$, ähnlich Grenzwerte.

Lemma 6.1.2:

Es gilt:

a) $s\left(Z^{(n)}\right)\leq S\left(Z^{(n)}\right)\ \forall n\forall Z^{(n)}$

b) Ist eine Folge von Zerlegungen $\left(Z^{(n)}\right)_n$ **hierarchisch**, d.h. $Z^{(n)}\subseteq Z^{(n+1)}\ \forall n$, so gilt:

$$s\left(Z^{(n)}\right)\leq s\left(Z^{(n+1)}\right)\overset{\text{a)}}{\leq} S\left(Z^{(n+1)}\right)\leq S\left(Z^{(n)}\right)\ \forall n$$

und somit (Monotoniekriterium für Folgen) sind die Folgen $\left(s\left(Z^{(n)}\right)\right)_n$ und $\left(S\left(Z^{(n)}\right)\right)_n$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} s\left(Z^{(n)}\right)\leq\lim\limits_{n\to\infty} S\left(Z^{(n)}\right)$.

Definition 6.1.3: Riemann-Integrale

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt, $s\left(Z^{(n)}\right)$, $S\left(Z^{(n)}\right)$ die Ober-/Untersumme zu f.

a) $\sup\left\{s\left(Z^{(n)}\right) \mid Z^{(n)}\text{ Zerlegung von }[a,b],\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\right\} =: \underline{\mathfrak{J}} =: \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$
heißt **unteres Riemann-Integral** von f oder **innerer Inhalt** von f.
$\inf\left\{s\left(Z^{(n)}\right) \mid Z^{(n)}\text{ Zerlegung von }[a,b],\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\right\} =: \overline{\mathfrak{J}} =: \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$
heißt **oberes Riemann-Integral** von f oder **äußerer Inhalt** von f.
Betrachtet werden für **jedes** $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ *alle* Zerlegungen $Z^{(n)}$!
Nicht verwechseln: $\mathfrak{J}$ ist ein Fraktur-„I“, kein „J“!

b) f heißt **auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar** („R.-intbar“ oder „intbar“ solange wir noch kein anderes Integral kennen), falls

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dann heißt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

das **Riemann-Integral** von a bis b über f bzgl. x. Dann heißt f **Integrand**.

Achtung: Wir benutzen nirgendwo Beträge. „Flächeninhalt unter dem Graphen“ gilt also nur *über* der x-Achse.

Lemma 6.1.4: Riemann-Integrabilitätskriterium

Für $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ gilt: f ist auf $[a,b]$ R-intbar $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0:\exists$ Zerlegung Z von $[a,b]: S(Z)-s(z)<\varepsilon$

Beweis zu 6.1.4:
$s(Z)\le\underline{\mathfrak{J}}\le\overline{\mathfrak{J}}\le S(Z)\ \forall$ Zerlegung Z

„$\Rightarrow$“ $\underline{\mathfrak{J}}=\overline{\mathfrak{J}}\Rightarrow\inf\{S(Z)\mid Z\text{ Zerlegung}\}=\sup\{s(Z)\mid Z\text{ Zerlegung}\}$
Wähle $\varepsilon>0$ fest, aber beliebig.
$\Rightarrow\exists$ Zerlegungen $\hat{Z}$ und $\tilde{Z}$, sodass

- $0\le S\left(\hat{Z}\right)-\overline{\mathfrak{J}}\le\varepsilon$
- $0\le\underline{\mathfrak{J}}-s\left(\tilde{Z}\right)\le\varepsilon$

Sei $Z:=\hat{Z}\cup\tilde{Z}$.

$$\Rightarrow\underline{\mathfrak{J}}-\varepsilon\le s\left(\tilde{Z}\right)\le s(Z)\le S(Z)\le S\left(\hat{Z}\right)\le\overline{\mathfrak{J}}-\varepsilon$$
$$\Rightarrow 0\le S(Z)-s(Z)\le\overline{\mathfrak{J}}+\varepsilon-\left(\underline{\mathfrak{J}}-\varepsilon\right)=2\varepsilon$$

„$\Leftarrow$“ $\forall\varepsilon>0\ \exists$ Zerlegung Z_ε von $[a,b]: S(Z_\varepsilon)-s(Z_\varepsilon)\le\varepsilon$

$$\Rightarrow\varepsilon>S(Z_\varepsilon)-s(Z_\varepsilon)\ge\underbrace{\overline{\mathfrak{J}}-\underline{\mathfrak{J}}}_{\text{hängt nicht von }\varepsilon\text{ ab}}\ge 0$$

Jetzt z.B.: $\varepsilon:=\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{1}{n}>\overline{\mathfrak{J}}-\underline{\mathfrak{J}}\ge 0\ \forall n$

$$\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}\overline{\mathfrak{J}}-\underline{\mathfrak{J}}=0$$

$\square$

Beispiel 6.1.5: Riemann-Integrierbarkeit

a) **„Derichlet-Funktion"**

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \text{ rational} \\ 1 & x \text{ irrational} \end{cases} \qquad x \in [0,1]$$

Sei $Z^{(n)}$ beliebige Zerlegung zu beliebigem n, in $I_j^{(n)} := [x_{j-1}, x_j]$ existieren rationale und irrationale Zahlen. $m_j^{(n)} = 0$, $M_j^{(n)} = 1$,

$$s\left(Z^{(n)}\right) = \sum_{j=1}^{n} m_j^{(n)} l_j^{(n)} = 0,$$

$$S\left(Z^{(n)}\right) = \sum_{j=1}^{n} M_j^{(n)} l_j^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} l_j^{(n)} = |[0,1]| = 1$$

$$\underline{\mathfrak{I}} = 0,\ \overline{\mathfrak{I}} = 1$$

$\Rightarrow f$ nicht R.-intbar.
„Nr.1-Beispiel" für nicht R-intbar.

b) $f(x) = x,\ x \in [0,1]$
Sei $Z^{(n)}$ eine beliebige Zerlegung, n beliebig.

$$s\left(Z^{(n)}\right) = \sum_{j=1}^{n} m_j^{(n)} l_j^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f\left(x_{j-1}^{(n)}\right)}_{=x_j^{(n)}} l_j^{(n)}$$

$$S\left(Z^{(n)}\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j^{(n)} \left(x_j^{(n)} - x_{j-1}^{n}\right) \text{ analog}$$

Spezielle Zerlegungsfolge: $x_j^{(n)} := \frac{j}{n},\ j \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\Rightarrow s\left(Z^{(n)}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} (j-1)(j-(j-1)) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} (j-1) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} j \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{(n-1)(n-1+1)}{2n^2}$$

$$= \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$S\left(Z^{(n)}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j(j-(j-1)) = \frac{n(n+1)}{n^2 \cdot 2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Also: $s\left(Z^{(n)}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$, $S\left(Z^{(n)}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

Definition 6.1.6:

Alles wie oben, jedoch: Sei $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktion.

$$l_j^{(n)} := \sigma\left(x_j^{(n)}\right) - \sigma\left(x_{j-1}^{(n)}\right)$$

(d.h. obiger Fall ist Spezialfall)
Wenn $\underline{\mathfrak{I}} = \overline{\mathfrak{I}}$, dann heißt f bzgl. σ **Riemann-Stieltjes-integrierbar** („R.-S.-integrierbar"), und

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) := \underline{\mathfrak{I}} = \overline{\mathfrak{I}} \text{ heißt } \textbf{Riemann-Stieltjes-Integral}.$$

Lemma 6.1.4 gilt auch für R.-S.-Integrale.

Beispiel 6.1.7: Heaviside/Dirac

$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ gegeben, $\sigma(x):=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$.

$l_j^{(n)}=\sigma\left(x_j^{(n)}\right)-\sigma\left(x_{j-1}^{(n)}\right)$ ist nur $\neq 0$, wenn $x_{j-1}^{(n)}<0\leq x_j^{(n)}$, dann $l_j^{(n)}=1$.
Sei $\tilde{j}$ dieser Index. $s\left(Z^{(n)}\right)=m_{\tilde{j}}^{(n)}l_{\tilde{j}}^{(n)}=m_{\tilde{j}}^{(n)}$, $S\left(Z^{(n)}\right)=M_{\tilde{j}}^{(n)}$
Sei f stetig in 0. $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:(|x|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(0)|<\varepsilon)$. Sei $\varepsilon>0$ gegeben, betrachte Zerlegung $Z^{(n)}$ mit $l_{\tilde{j}}^{(n)}=\left|I_{\tilde{j}}^{(n)}\right|<\delta(\varepsilon)$.

$$\Rightarrow f(0)-\varepsilon\leq m_{\tilde{j}}=s\left(Z^{(n)}\right)\leq S\left(Z^{(n)}\right)=M_{\tilde{j}}^{(n)}\leq f(0)+\varepsilon$$
$$\Rightarrow 0\leq S\left(Z^{(n)}\right)-s\left(Z^{(n)}\right)\leq f(0)+\varepsilon-(f(0)-\varepsilon)=2\varepsilon$$

$\Rightarrow f$ ist R.-S.-intbar (Integrabilitätskriterium).

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)=f(0)$$

Geht auch allgemeiner: Sei $a<x_0<b$, $\sigma(x):=\begin{cases}0 & x<x_0\\ 1 & x\geq x_0\end{cases}$

$$\delta_{x_0}:\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\,|\,f\text{ stetig in }x_0\}\to\mathbb{R},\ f\mapsto\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)=f(x_0)$$

Man kann eine Metrik für diesen Raum definieren.

Man nennt $\delta_{x_0}(f)=f(x_0)$ das **Dirac-Funktional**.

(Nennt man **Operatoren** (Abb. metr. Raum → metr. Raum) oder **Funktional** (Abb. norm. Raum → norm. Raum). → Approximationstheorie, Physik (Elektrodynamik, Quantenmechanik), ...)

Satz 6.1.8: Weitere Integrabilitätskriterien

a) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist f Riemann-integrierbar auf $[a,b]$.
Ist zusätzlich $\sigma:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton wachsend, dann ist f R.-S.-intbar.
b) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton. Dann ist f R-intbar auf $[a,b]$.
Ist zusätzlich $\sigma:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton wachsend und stetig, so ist f R.-S.-intbar.

Ab jetzt: $\sigma(x)=x$. Also:

f diffbar auf $[a,b]\Rightarrow f$ stetig auf $[a,b]\Rightarrow f$ R.-intbar

z.B.: $\not\Leftarrow$ $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto|x|$ $\not\Leftarrow$ $f:[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\lfloor x\rfloor$

Bzgl. der Gaußklammer: $[x]:=\lfloor x\rfloor:=\max\{n\in\mathbb{Z}\,|\,n\leq x\}$ „abrunden", unstetig in 0.

Sei Z Zerlegung von $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, sei $I_{\tilde{j}}$ das Intervall mit der Eigenschaft, dass $x_{\tilde{j}-1}<0\leq x_{\tilde{j}}$. $\Rightarrow M_{\tilde{j}}=0,\ m_{\tilde{j}}=-1$.
Für alle anderen Intervalle ist f konstant $(M_j=m_j)$.

$$\Rightarrow S(Z)-s(Z)=(0-(-1))\cdot l_{\tilde{j}}=l_{\tilde{j}}$$

Durch Verfeinerung der Zerlegung kann $l_{\tilde{j}}$ beliebig klein werden. Wegen dem Integrabilitätskriterium (Lemma 6.1.4): f R-intbar auf $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Aber eben unstetig in 0.

Alternativ: $\lfloor x\rfloor$ ist monoton wachsende Funktion. $\Rightarrow$ R.-intbar.

Definition 6.1.9: Riemann-Zwischensumme

a) Eine Folge $\left(Z^{(n)}\right)_n$ von Zerlegungen vom Intervall I heißt **Zerlegungsnullfolge**, falls

$$\delta\left(Z^{(n)}\right) := \max_j l_j^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(n muss nichts mit der Anzahl der Punkte zu tun haben, $Z^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\right)$)

b) Sei $I := [a,b]$, $f : I \to \mathbb{R}$, Z eine beliebige Zerlegung von I, $\xi_i \in I_i$ für $i \in \underline{n}$ beliebige Punkte.

$$S(Z;\, \xi_1, \dots, \xi_n) := \sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_j\right) l_j$$

heißt **Riemann-Zwischensumme**.

Satz 6.1.10: (Definition nach Riemann)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.
Dann gilt: f ist auf $[a,b]$ R.-intbar genau dann, wenn $\forall$ Zerlegungsnullfolge $\left(Z^{(n)}\right)_n$ und jede Wahl passender Zwischenpunkte $\xi^{(n)} \in \mathbb{R}^{k_n}$ die Folge der Riemann-Zwischensummen konvergent ist.
In diesem Fall konvergieren die R.-Zwischensummen alle gegen den gleichen Grenzwert: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (gilt analog auch für R.-S.-Integral).

Satz 6.1.11: Eigenschaften des Riemann-Integrals

Seien f, g R.-intbar auf $I := [a,b]$. Dann gilt:

a) **Linearität:** $\alpha f + \beta g$ sind R.-intbar $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

b) **Positivität:** Wenn $f \geq 0$ auf $[a,b]$, so ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

c) **Monotonie:** Wenn $f \leq g$ (d.h. $f(x) \leq g(x)\ \forall x$), dann ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

d) **Dreiecksungleichung** für Integrale: $|f|$ ist R.-intbar und

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

e) **Additivität** des Integrals (bzgl. des Integrationsbereichs):
Sei $a < c < b$. $\Rightarrow f$ auf $[a,c]$ und $[c,b]$ R.-intbar und

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

f) **Definitheit:** Wenn $f \geq 0$, f stetig auf I und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, dann gilt: $f = 0$ (d.h. $f(x) = 0\ \forall x$).

Beweis zu 6.1.11:

a) R.-Zwischensummen linear, GWS ($S_{\alpha f+\beta g}\left(Z^{(n)};\, \xi^{(n)}\right) = \alpha S_f\left(Z^{(n)};\, \xi^{(n)}\right) + \beta S_g\left(Z^{(n)};\, \xi^{(n)}\right)$).

b) $m_j \geq 0 \Rightarrow s(Z) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \underline{\mathfrak{J}} \geq 0$.

c) $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in I$.

$$\Rightarrow 0 \leq g(x) - f(x)\ \forall x \in I$$

$$\overset{\text{b)}}{\Longrightarrow} \int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0 \overset{\text{a)}}{\Longrightarrow} \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

d) **Idee** zum Beweis der R.-Intbarkeit von $|f|$:

$f^+(x) := \max(f(x),\ 0),\ f^-(x) := \max(-f(x),\ 0)$

Zeigen, dass f^+ und analog f^- R.-intbar ist (siehe Analysis-Bücher).

$f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$. $\Rightarrow |f|$ R.-intbar.

Dann:

$$\left|S\left(Z^{(n)};\xi^{(n)}\right)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_j^{(n)}\right) l_j^{(n)}\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|f\left(\xi_j^{(n)}\right)\right| \underbrace{l_j^{(n)}}_{\geq 0}$$

$$\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

e) Die **charakteristische Funktion** oder **Indikatorfunktion** ist

$$\chi_D(x) := \begin{cases} 1 & x \in D \\ 0 & x \notin D \end{cases} \qquad D \subseteq \mathbb{R}$$

$f = \chi_{[a,c]} \cdot f + \chi_{]c,b]} \cdot f$

$$\overset{\text{a)}}{\Longrightarrow} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \chi_{[a,c]}(x) f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \chi_{]c,b]}(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

f) **indirekt:** Annahme: $\exists \xi \in I : f(\xi) \neq 0$, d.h. $f(\xi) > 0$.

f stetig: Sei $\eta := f(\xi)$. Zu $\varepsilon := \frac{\eta}{2}$ existiert $\delta > 0 : (|x-\xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon)$.

$\Rightarrow f(x) \geq \frac{\eta}{2}\ \forall x \in \mathcal{U}_\delta(\xi)$, o.B.d.A. $\mathcal{U}_\delta(\xi) \subseteq I$

$g(x) := \frac{\eta}{2} \cdot \chi_{\mathcal{U}_\delta(\xi)}$ (Treppenfunktion, leicht z.z.: R.-intbar)

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \overset{\downarrow}{=} \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \frac{\eta}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\eta}{2} \cdot 2\delta = \eta\delta$$

$$g \leq f \overset{\text{c)}}{\Longrightarrow} 0 < \eta\delta = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad ↯$$

□

Definition 6.1.12: Umkehren der Integrationsgrenzen

Sei $a < b,\ c \in [a,b],\ f$ R.-intbar auf $[a,b]$.

- $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x := 0$

Grund: Erhält die Additivität. Aber **Achtung:** Monotonie gilt dabei nicht.

Bemerkung 6.1.13: Integral für komplexwertige Funktion

Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R},\ f : [a,b] \to \mathbb{C}$.
In $\mathbb{C}$ gibt es keine Ordnung mehr, daher keine Ober-/Untersummen. Daher: Zwischensummen + GWS.
f ist (komplex) R.-intbar genau dann, wenn $\mathrm{Re} f$ und $\mathrm{Im} f$ (reell) R.-intbar sind. Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re} f(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i} \cdot \int_a^b \mathrm{Im} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Lemma 6.1.14:

a) Seien f,g R.-intbar, $f(x)=g(x)\ \forall x\in D$, D dicht in I.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

b) Sei f R.-intbar, $h: f(I)\to\mathbb{R}$ glm. stetig. Dann ist $h\circ f: I\to\mathbb{R}$ R.-intbar.

c) Sei f R.-intbar, außerdem $|f(x)|\geq\delta>0\ \forall x\in I.\Rightarrow \frac{1}{f}$ R.-intbar.
Forderung $|f|\geq\delta>0$, damit $1/f$ beschränkt ist durch $1/\delta$.

d) Seien f,g R.-intbar. $\Rightarrow f\cdot g,\ \max(f,g)=\min(f,g)$ R.-intbar.

Übung 6.1.Ü1:

Sei $I:=[a,b],\ f:I\to\mathbb{R}$ R.-intbar.
Dann ist $F:I\to\mathbb{R},\ x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ Lipschitzstetig.

Beweis:
Da f R.-intbar, ist f per Definition beschränkt, d.h. $\exists K\in\mathbb{R}_0^+:\forall x\in I:|f(x)|\leq K$.
Seien $x,y\in I$ beliebig. Betrachte:

$$\begin{aligned}|F(x)-F(y)| &= \left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\overset{\text{Additivität}}{=} \left|\int_a^y f(t) + \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\overset{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \left|\int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_x^y K\,\mathrm{d}t\right| = K|x-y|\end{aligned}$$

$\Rightarrow F$ ist Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $K=\sup_{t\in I}|f(t)|$. $\square$

Übung 6.1.Ü2: Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung (CSB)

Seien $f,g\in\mathrm{C}[a,b]$. Dann gilt:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Dies ist ein Sonderfall von der CSB-Ungleichung für Skalarprodukte.

6.2 Zentrale Sätze

Satz 6.2.1: Mittelwertsatz der Integralrechnung

a) **„1. MWS Int.“**
Wenn $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *stetig* ist, dann $\exists\xi\in I:=[a,b]:\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

b) **„2. MWS Int.“**
Wenn $f:I\to\mathbb{R}$ *stetig* und $p:I\to\mathbb{R}$ R.-intbar und $p\geq 0$, dann $\exists\xi\in I$:

$$\int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

(1. MWS Int. ist Spezialfall $p(x)=1$ von 2. MWS Int.)

Beweis zu 6.2.1:

Idee: f stetig auf Kompaktum.

$$\Rightarrow \exists m := \min_{x\in I} f(x),\ \exists M := \max_{x\in I} f(x)$$
$$\Rightarrow m \le f(x) \le M \ \forall x \in I$$
$$\overset{p\ge 0}{\Longrightarrow} m\,p(x) \le f(x)\,p(x) \le M\,p(x)\ \forall x$$
$$\overset{\text{Mon. d. Int.}}{\Longrightarrow} \int_a^b m\,p(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,p(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b M\,p(x)\,\mathrm{d}x$$

Jetzt Fallunterscheidung: $\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *oder* $\neq 0$. □

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ heißt **Integral-Mittelwert** von f.

Satz 6.2.2: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HSDI)

(1) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R.-intbar und stetig in $\xi\in[a,b]$.
$\Rightarrow F(x) := \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ c\in[a,b],\ x\in[a,b]$ in ξ diffbar und $F'(x) = f(\xi)$.
(Somit: $f\in C(I) \Rightarrow F\in C^{(1)}(I);\ f\in C^{(k)}(I)\Rightarrow F\in C^{(k+1)}(I),\ k\in\mathbb{N}$.)
F mit $F' = f$ heißt **Stammfunktion** von f.

(2) Sei $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig diffbar. $\Rightarrow F(b)-F(a) = \int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t$.

Allgemein für $x,c\in[a,b]$: $F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t)\,\mathrm{d}t$.

Man schreibt $F(x)\big|_a^b := F(b)-F(a)$

Tabelle von Stammfunktionen:

$f = F'$	F ($\pm$ Konstante)
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha-1}, \alpha\neq -1$ bzw. $\ln\lvert x\rvert,\ \alpha = -1$

Die Differenzierbarkeitsordnung wird oft als Maßfür die „Glattheit“ einer Funktion angesehen, d.h. Integrieren „glättet“ eine Funktion und Ableiten „raut“ eine Funktion auf.

Satz 6.2.3: Partielle Integration (*Integration by parts*)

Seien $u,v\in C^{(1)}[a,b]$.

$$\Rightarrow \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis zu 6.2.3:

$$\underbrace{\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x}_{\overset{\text{2. HSDI}}{=} u(x)v(x)\big|_a^b} \overset{\text{Prod.reg.}}{=} \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

□

Beispiel 6.2.4: Anwendungen partieller Integration

a) $$\int_a^x \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \int_a^x \underbrace{\sin(t)}_{u'(t)}\underbrace{\sin(t)}_{v(x)}\,\mathrm{d}t = \underbrace{-\cos(t)}_{u(t)}\underbrace{\sin(t)}_{v(t)}\Big|_a^x - \int_a^x \underbrace{-\cos(t)}_{u(t)}\underbrace{\cos(t)}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\cos(t)\sin(t)\Big|_a^x + \int_a^x \underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \int_a^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t = (-\cos(t)\sin(t)+t)\Big|_a^x - \int_a^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t \qquad \| + \textstyle\int_a^x \sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow 2\int_a^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t = (t-\cos(t)\sin(t))\Big|_a^x$$

$$\Rightarrow \int_a^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(t-\cos(t)\sin(t))\Big|_a^x \qquad \leftarrow \text{Stammfkt. von } \sin^2$$

b) $$\int_a^x \ln t\,\mathrm{d}t = \int_a^x \underbrace{1}_{u'(t)}\cdot\underbrace{\ln t}_{v(t)}\Big|_a^x - \int_a^x \underbrace{t}_{u(t)}\cdot\underbrace{\frac{1}{t}}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t = (t\cdot\ln t - t)\Big|_a^x$$

Satz 6.2.5: Substitutionsregel

Seien $g \in C^{(1)}[a,b]$, $f \in C^{(0)}(g([a,b]))$, $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in\,]a,b[$.

$$\Rightarrow \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis zu 6.2.5:

Sei F Stammfunktion von f (existiert wegen 1. HSDI) .

$$\int_a^b (F\circ g)'(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b F'(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$$

|| 2. HSDI

$$(F\circ g)(x)\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F(t)\Big|_{g(a)}^{g(b)} \overset{\text{2. HSDI}}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} F'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

□

Beispiel 6.2.6: Anwendungen der Substitutionsregel

a) $\int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x = ?,\ f(t) := e^t,\ g(x) := 2x,\ f(g(x)) = e^{2x},\ g'(x) = 2 \neq 0\ \checkmark$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 e^{2x}\cdot 2}_{\text{r.S. d. Subst.r.}} = \frac{1}{2}\int_{g(0)}^{g(1)} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^2 e^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot e^t\Big|_0^2 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$$

(Substitutionsregel von rechts nach links)

b) $\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = ?,\ f(t) := \frac{1}{\sqrt{1-t^2}},\ y \in\,]0,1[,\ g(x) := \sin x,\ g'(x) = \cos x$

$g(a) = 0,\ g(b) = y\ \Rightarrow\ a = 0,\ b = \arcsin y$

$$f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|}$$

$$\Rightarrow \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\arcsin y} \frac{1}{\cos x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\arcsin y} 1\,\mathrm{d}x = \arcsin y$$

(Substitutionsregel von links nach rechts)

c) $\int_0^y \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = ?,\ f(t) := \frac{1}{1+t^2},\ g(x) := \tan x,\ g'(x) = 1+\tan^2 x$

Offensichtlich ist $g' \neq 0$, da Quadrate immer positiv sind.

$$\int_0^y \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\tan(\arctan 0)}^{\tan(\arctan y)} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{Substitution}}{=} \int_{\arctan 0}^{\arctan y} \frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t = \int_{\arctan 0}^{\arctan y} 1\,\mathrm{d}t = t\Big|_{\arctan 0}^{\arctan y} = \arctan y$$

Definition 6.2.7: Unbestimmtes Integral

Sei f R.-intbar. Dann bezeichnet das sogenannte **unbestimmte (Riemann-)Integral**

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

die Menge aller Stammfunktionen von f.
Häufige Schreibweise: Wenn F eine Stammfunktion von f, schreibt man $\int f(x) = F(x) + \mathrm{const.}$

Man schreibt oft auch eine Stammfunktion als Repräsentant. Das $+\mathrm{const.}$ stimmt für stückweise definierte Funktionen ohnehin nicht mehr, also kann man es auch weglassen, wenn der Zusammenhang klar ist.

Beispiel 6.2.8:

Sei h stetig diffbar auf $[a,b]$; Substitution $f(t) = \frac{1}{t},\ g(x) = h(x),\ f(g(x)) = \frac{1}{h(x)}$

$$\int_a^b \frac{h'(x)}{h(t)}\,\mathrm{d}t \overset{\checkmark}{=} \int_{h(a)}^{h(b)} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t|\Big|_{h(a)}^{h(b)} = \ln|h(x)|\Big|_a^b$$

6.3 Uneigentliche Integrale

Definition 6.3.1: UNEIGENTLICH INTEGRIERBAR

Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$.

a) Sei $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ auf $[a,c]\ \forall c \in [a,b[$ R.-intbar.
f heißt **uneigentlich integrierbar** auf/über $[a,b[$ oder $[a,b]$, falls folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

dann: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

(Analog: $f :]a,b] \to \mathbb{R},\ \lim\limits_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x =: \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$)

b) Sei $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ R.-intbar auf $[a,c]\ \forall c > a$.
f heißt **uneigentlich intbar** über $[a,+\infty[$, falls existiert:

$$\lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

dann: $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

c) Wenn $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ auf $]a,d]$ *und* auf $[d,b[$ für (mindestens) ein $d \in]a,b[$ uneigentlich intbar ist, so heißt f auf $]a,b[$ uneigentlich intbar und

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(praktisch wie Additvität)}$$

d) analog zu c): $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf $]-\infty,d]$ und $[d,+\infty[$ jeweils uneigentlich intbar für (mindestens) ein $d \in \mathbb{R}$. Dann heißt f auf $\mathbb{R}$ uneigentlich intbar und wir setzen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Bsp.: $\int_{-\infty}^{+\infty}$ Gaußsche Glockenfunktion $= \sqrt{\pi} \to$ Analysis III, Stochastik

e) Analog: $f : [a,b] \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ mit $x_0 \in]a,b[$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

falls beide uneigentlichen Integrale der rechten Seite existieren.

Satz 6.3.2:

Sei $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind äquivalent:

a) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert (d.h. $\in \mathbb{R},\ < +\infty$).

b) $\exists$ Stammfunktion F von f, sodass $\lim\limits_{c\to+\infty} F(c)$ existiert.

c) $\forall$ Stammfunktionen F von f existiert $\lim\limits_{c\to\infty} F(c)$.

Lemma 6.3.3:

Sei $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in [a,b]$, mit der Eigenschaft, dass $\forall$ Folge $(y_n) \subseteq [a,b]$ mit $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} h(y_n)$ existiert.

$\Rightarrow$ Der Grenzwert von $h(y_n)$ ist für all solche Folgen der gleiche.

Analog: $h : [a,+\infty[\to \mathbb{R},\ y_n \longrightarrow \infty$ und $h :]-\infty, b] \to \mathbb{R},\ y_n \longrightarrow -\infty$

Beweis zu 6.3.3:

Seien $(y_n),(z_n)$ zwei solche Folgen. Definiere eine neue Folge (w_n) mit

$w_{2k} := y_k,\ w_{2k+1} := z_k\ \forall k \in \mathbb{N}$

d.h. $w = (y_0,\ z_0,\ y_1,\ z_1,\ y_2,\ \ldots)$

$\Rightarrow w_n \longrightarrow x_0 \overset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} h(w_n)$ existiert.

$\Rightarrow$ alle Tf. von $(h(w_n))_n$, insbesondere $(h(y_k))_k$ und $(h(z_k))_k$, konvergieren gegen den gleichen Limes. $\square$

Satz 6.3.4:

Sei $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R},\ g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}_0^+$ gegeben mit:

(i) $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ existiert (d.h. $\in \mathbb{R}$).

(ii) f auf $[a,c]$ intbar $\forall c \geq a$.

(iii) $|f(x)| \leq g(x)\ \forall x \in [a,+\infty[$ („g majorisiert f“).

Dann existiert $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ (analog für $]a,b],\ [a,b[,\ ]-\infty,a]$).

Beweis zu 6.3.4:

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert $\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \lim\limits_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert

$\Leftrightarrow \forall$ Folge (c_n) mit $c_n \longrightarrow +\infty$ existiert $\displaystyle\int_a^{c_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ (und der Grenzwert ist immer gleich, $\to$ Lemma 6.3.3)

$\Leftrightarrow \forall$ Folge (c_n) mit $c_n \longrightarrow +\infty$ ist $\left(\int_a^{c_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$ eine Cf. in $\mathbb{R}$.

Gilt bereits für g. Sei (c_n) beliebige Folge mit $c_n \longrightarrow \infty$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n,m \geq n_0 :$ (o.B.d.A. $c_n \geq c_m$)

$$\left|\int_a^{c_n} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{c_m} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \overset{\text{Add.}}{=} \left|\int_{c_m}^{c_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \overset{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \int_{c_m}^{c_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x \overset{\text{(iii)}}{\leq} \int_{c_m}^{c_n} g(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{(i)}}{\leq} \varepsilon$$

$\square$

Definition 6.3.5: Cauchy'scher Hauptwert

Seien $a < x_0 < b,\ f : [a,b] \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$.
Falls der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \left(\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

existiert, so wird er als **Cauchy'scher Hauptwert** (*Cauchy principal value*) des Integrals von f über $[a,b]$ bezeichnet.
Notationen:

$$\mathrm{CH}-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{Hw}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{pv}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ist f auf $[a,x_0[$ und auf $]x_0,b]$ jeweils uneigentlich intbar, so besitzt f C.H. auf $[a,b]$.
Die Umkehrung i.A. gilt nicht! Siehe voriges Beispiel.

Satz 6.3.6: Integralkriterium für Reihen

Sei $f : [p, +\infty[\to [a, +\infty[$ monoton fallend, $p \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \sum_{n=p+1}^{\infty} f(n) \leq \int_p^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=p}^{\infty} f(n)$$

(Auch in dem Sinne, dass ein Teil $+\infty$ sein darf.)

Beweis zu 6.3.6:

Idee: Über Ober-/Untersummen. □

6.4 Folgen und Reihen von Funktionen III

Satz 6.4.1: Satz über gliedweise Integration

Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, R.-intbar und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{C[a,b]} = 0$.

Dann ist auch f R.-intbar und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Auch hier wieder: Vertauschen von Grenzwerten (Integral ist auch Grenzwert).

Entsprechend für Reihen: Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ R.-intbar $\forall n$ und konvergiere $\sum\limits_{n=0}^{N} f_n \xrightarrow{N\to\infty} f$ *gleichmäßig*.

$$\Rightarrow f \text{ R.-intbar und } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel 6.4.2: Fourier-Reihen

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx))$ mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < +\infty$ (l_1-Folge)

$\Rightarrow$ Fourier-Reihe ist *gleichmäßig* konvergent.

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k (-\cos(kt) + 1) \frac{1}{k} + b_k \cdot \frac{1}{k} \sin(kt) \right)$$

Korollar 6.4.3: Potenzreiheninintegration

Potenzreihen dürfen im Inneren des Konvergenzkreises beliebig oft gliedweise integriert werden.

Satz 6.4.4: Satz über gliedweise Differentiation (verallgemeinert)

Seien $I := [a,b]$, $f_n : I \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, (punktweise) gegen $f : I \to \mathbb{R}$ konvergent, (f_n') *gleichmäßig* konvergent auf I.

$\Rightarrow f$ stetig diffbar auf I und $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)\ \ \forall x \in I$.

(d.h. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$) (analog für Reihen)

Beweis zu 6.4.4:

Sei $g(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)\ \ \forall x \in I$ (*glm.*).

z.z.: $g = f'$

Nach dem Satz über gliedweise Integration gilt:

$$\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)\,\mathrm{d}t \overset{6.4.1}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t \overset{2.\text{ HSDI}}{=} \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$$

$\overset{1.\text{ HSDI}}{\Longrightarrow} g(x) = f'(x)$ und f ist diffbar.

□

Übung 6.4.Ü1: Raum der stetig diffbaren Funktionen

$\mathrm{C}^{(1)}[a,b]$ mit der Norm $\|f\|_{\mathrm{C}^{(1)}[a,b]} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ für $f \in \mathrm{C}^{(1)}[a,b]$ ist ein Banachraum.

7 Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

7.1 Partielle und totale Ableitungen

VORBEMERKUNG:

- $e^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ ist ein Vektor $(0,\dots,1,\dots,0) = \left(\delta_{ij}\right)_{i\in\underline{n}}$
- bei Vektoren: oberer Index ist Nummerierung, unterer Index ist Bezug auf Komponente.
  $e^{(2)} = (0,1)$ in $\mathbb{R}^2$, $e^{(2)}_0 = 0,\ e^{(2)}_1 = 1$
- Koordinatenrichtungen: $x_1,\dots,x_n$ oder x,y,z (je nach Zusammenhang).

Definition 7.1.1: PARTIELLE DIFFERENZIERBARKEIT

Sei $x^{(0)}$ innerer Punkt von $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
$f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt **partiell diffbar** in $x^{(0)}$ nach x_j ($j \in \underline{n}$), falls

$$\lim_{\substack{h\to 0\\(h\in\mathbb{R})}} \frac{f\left(x^{(0)} + he^{(j)}\right) - f\left(x^{(0)}\right)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x^{(0)}\right) =: \partial_j f\left(x^{(0)}\right)$$

existiert. Dieser heißt **partielle Ableitung** von f in $x^{(0)}$ nach x_j.

- Ist 1-dimensionale Ableitung! Alle anderen Variablen ($x_i,\ i \neq j$) als konstant annehmen und als 1-D-Funktion von x_j ableiten.
- Entsprechend Ableitungsregeln übertragen, soweit sinnvoll.

Beispiel 7.1.2: GEGENBEISPIEL: STETIGKEIT UND PARTIELLE ABLEITUNGEN

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\boldsymbol{(x,y) \neq (0,0)}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\left(x^2+y^2\right) - xy\cdot 2x}{x^2+y^2} = y\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\left(x^2+y^2\right) - xy\cdot 2y}{x^2+y^2} = x\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$\boldsymbol{(x,y) = (0,0)}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f((x,y)+(h,0)) - f(x,y)}{h} \overset{(x,y)=(0,0)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0 \text{ weil der Zähler } = 0 \text{ ist (ohne Limesbildung).}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ analog.
$\Rightarrow f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell diffbar nach x und y.
Aber: f unstetig in $(0,0)$: Sei $(t,t) \xrightarrow{t\to 0} 0 \Rightarrow f(t,t) = \frac{t\cdot t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \not\to 0 = f(0,0)$

Also: partiell diffbar $\not\Rightarrow$ stetig

Definition 7.1.3: Totale Differenzierbarkeit

Sei $x^{(0)}$ innerer Punkt von $U \subseteq \mathbb{R}^n$. $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt **(total) diffbar** in $x^{(0)}$, falls es eine lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

gibt, sodass

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ (h\in\mathbb{R}^n)}} \frac{f\left(x^{(0)}+h\right)-f\left(x^{(0)}\right)-L(h)}{|h|} = 0 \in \mathbb{R}^m$$

$h \mapsto L(h)$ heißt **totales Differential** (totale Ableitung, Fréchet-Ableitung) von f in $x^{(0)}$.

Bezeichnung: $L(h) := \mathrm{d}f(h) =: \mathrm{d}f\left(x^{(0)}, h\right) =: \underbrace{f'\left(x^{(0)}\right)}_{\text{lin. Abb.}}(h)$

Definition 7.1.4: Landau-Symbole

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $g : D \to \mathbb{R}^+$.

a) $f(x) = o(g(x))$ für $x \longrightarrow \xi$ $:\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ existiert und $= 0$.

b) $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \longrightarrow \xi$ $:\Leftrightarrow$ $\exists$const. $C \in \mathbb{R}_0^+ : \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (\mathcal{U}_\varepsilon(\xi) \cap D) \setminus \{\xi\} : \frac{|f(x)|}{g(x)} \leq C$

d.h. $f\left(x^{(0)}+h\right)-f\left(x^{(0)}\right)-f'\left(x^{(0)}\right) = o(|h|)$ für $h \longrightarrow 0$ $\Leftrightarrow:$ f total diffbar in $x^{(0)}$.

Bemerkung 7.1.5:

Seien $n = m = 1$, $L(h) = ah$ ($a \in \mathbb{R}$ konstant).
Dann ist $f\left(x^{(0)}+h\right)-f\left(x^{(0)}\right) = ah + o(|h|)$ für $h \longrightarrow 0$, d.h. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f\left(x^{(0)}+h\right)-f\left(x^{(0)}\right)}{h} = a + 0 \Rightarrow f'\left(x^{(0)}\right) = a$.
$\Rightarrow$ Die totale Ableitung ist in 1-D die übliche Ableitung.

Satz 7.1.6:

a) f total diffbar in $x^{(0)} \Rightarrow f$ stetig in $x^{(0)}$.
b) Die lineare Abbildung $f'\left(x^{(0)}\right)$ ist, wenn sie existiert, eindeutig gegeben.

Definition 7.1.7: Jacobi-Matrix

Die Darstellung der linearen Abbildung

$$f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ in } x^{(0)}$$

bzgl. Basen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ als $m \times n$-Matrix heißt **Jacobi-Matrix** $J_{f\left(x^{(0)}\right)} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
Ihre Determinante heißt **Jacobi-Determinante** oder ***Jacobian***.

Beispiel 7.1.8:

Sei $f(x) := Ax$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$$f\left(x^{(0)}+h\right)-f\left(x^{(0)}\right) = A\left(x^{(0)}+h\right) - Ax^{(0)} = Ah$$
$$f\left(x^{(0)}+h\right)-f\left(x^{(0)}\right) - Ah = 0 = o(|h|),\ h \longrightarrow 0$$

f in ganz $\mathbb{R}^n$ total diffbar, $f'\left(x^{(0)}\right) = A \ \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

Es gilt analog zu 1-D:
Seien f, g total diffbar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.
$\Rightarrow f+g,\ \lambda f$ total diffbar und $(f+g)' = f' + g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$.

Lemma 7.1.9:

Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $0 < q < p < +\infty$.

a) $\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{1/q}$ (**Jensen'sche Ungleichung**)

b) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |a_i| \leq |a|_{\mathbb{R}^n} \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$ ($|\cdot|_{\mathbb{R}^n}$ ist euklidische Norm)

Satz 7.1.10:

Sei $x^{(0)}$ innerer Punkt von $U \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: G \to \mathbb{R}^m$ in U *partiell diffbar* nach allen Variablen.
Wenn diese partiellen Ableitungen *alle stetig* in $x^{(0)}$ sind, *dann* ist f in $x^{(0)}$ **total diffbar**.
Die Jacobi-Matrix (bzgl. kartesischer Koordinaten, d.h. bezüglich der Standardbasis $\left(e^{(j)}\right)_j$), ist

$$f'\left(x^{(0)}\right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(x^{(0)}\right)\right)_{\substack{i \in \underline{m} \\ j \in \underline{m}}}$$

Beweis zu 7.1.10:
Idee: 1-D-MWS-Diff: □

Beispiel 7.1.11: Gegenbeispiel: Partiell diffbar $\not\Rightarrow$ total diffbar

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f überall partiell diffbar, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
f *nicht* total diffbar in $(0,0)$, da f unstetig in $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ unstetig in } (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cdot \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{y^3}{yx} \begin{cases} \longrightarrow +\infty & (y \to 0^+) \\ \longrightarrow -\infty & (y \to 0^-) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Stetigkeitsbedingung in 7.1.10 kann nicht weggelassen werden.

Ist also das gleiche Beispiel wie 7.1.2, man kann hier also „zwei Fliegen mit einer Klappe schlagen."

Definition 7.1.12: Gradient

Im Fall $f: D \to \mathbb{R}$, f diffbar in $x^{(0)} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

$$f'\left(x^{(0)}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^{(0)}\right), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x^{(0)}\right)\right) =: \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\left(x^{(0)}\right) =: \operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right)$$

Gradient von f.

Definition 7.1.13: Nabla- und verwandte Operatoren

a) **Vektorprodukt/Kreuzprodukt** (nur im $\mathbb{R}^3$):

Für $a, b \in \mathbb{R}^3$ sei $a \times b := a \wedge b := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

b) **Nabla-Operator:** $\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

- Für $g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, ist also $\operatorname{grad} g = (\nabla g)^{\mathrm{T}}$.
- Für diffbares $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, (gleiches n) sei

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i =: \nabla \cdot f =: \operatorname{div} f$$

  die **Divergenz** der Funktion.
- Für diffbares $f : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, sei

$$\operatorname{rot} f := \nabla \times f := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} f_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \end{pmatrix} =: \operatorname{curl} f$$

  die **Rotation** von f.
- Für zweimal diffbares $g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sei

$$\Delta g := \nabla \cdot \nabla g = \operatorname{div}(\operatorname{grad} g)^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} g$$

  wobei Δ **Laplace-Operator** genannt wird.
  Funktionen mit $\Delta g = 0$ (Laplace-Gleichung) heißen **harmonisch**.
- Für diffbares $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, in $x^{(0)}$ gilt:

$$f'\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1\left(x^{(0)}\right) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m\left(x^{(0)}\right) \end{pmatrix} = \left(\nabla f_1\left(x^{(0)}\right), \cdots, \nabla f_m\left(x^{(0)}\right)\right)^{\mathrm{T}}$$

Definition 7.1.14: Richtungsableitung

Sei $x^{(0)}$ innerer Punkt von $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$.
f besitzt in $x^{(0)}$ eine Richtungsableitung in Richtung $v \in \mathcal{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$, falls

$$\lim_{\substack{h \to 0^+ \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f\left(x^{(0)} + hv\right) - f\left(x^{(0)}\right)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^{(0)}\right)$$

existiert.
vgl. normale partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ mit Richtungsableitung in Richtung $e^{(j)}$.

Übung 7.1.Ü1: Gegenbeispiel Richtungsableitungen und totale Diffbarkeit

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

f hat Richtungsableitungen in jede Richtung $v \in \mathcal{S}^1$, ist aber nicht total diffbar.

7.2 Höhere Ableitungen

entsprechend 1-D (falls Grenzwert existent):

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right) = \lim_{\substack{h\to 0\\(h\in\mathbb{R})}} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}+he^{(j)}\right)-\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right)}{h} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\left(x^{(0)}\right) := f_{x_i x_j}\left(x^{(0)}\right)$$

Achtung Reihenfolge! In allen Schreibweisen: „Das, was näher an f dran ist, zuerst."
D.h.: bei letzterem andersrum als bei Bruchschreibweise.

Definition 7.2.1: Gebiet

$G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt...

a) **zusammenhängend** (*connected*), falls gilt:
Zu je zwei Punkten $x, y \in G$ existieren endlich viele Punkte $x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \in G$ derart, dass die Verbindungsstrecken $\overline{xx^{(1)}}$, $\overline{x^{(1)}x^{(2)}}$, …, $\overline{x^{(m-1)}x^{(m)}}$, $\overline{x^{(m)}y}$ in G enthalten sind.
Dabei ist $\overline{ab} := \{a+\lambda(b-a) \,|\, \lambda \in]0,1[\}$ für $a, b \in \mathbb{R}^n$.
Man sagt auch, der **Polygonzug** $\overline{xx^{(1)}\cdots x^{(m)}y}$ liegt in G.

zusammenhängend   nicht zusammenhängend

b) **Gebiet** (*region*), falls G offen und zusammenhängend ist.

Definition 7.2.2: Räume stetig partiell diffbarer Funktionen

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir betrachten Funktionen $f: G \to \mathbb{R}^m$.

$\mathrm{C}^{(1)}(G, \mathbb{R}^m)$: Raum aller auf G (nach allen Variablen) stetig partiell diffbaren Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^m$.

$\mathrm{C}^{(k)}(G, \mathbb{R}^m)$: Raum aller auf G (nach allen Variablen) k-mal stetig partiell diffbaren Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^m$.

$\mathrm{C}^{(k)}(G) := \mathrm{C}^{(k)}(G, \mathbb{R}^1)$ (skalare Funktionen)

Satz 7.2.3: Satz von Schwarz

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $U \subseteq G$ offen, $f \in \mathrm{C}^{(1)}(G, \mathbb{R}^m)$, $x^{(0)} \in U$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existieren und sind *stetig* in $x^{(0)}$.
Dann ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x^{(0)}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\left(x^{(0)}\right)$. (Vertauschbarkeit gemischter Ableitungen)

Beweis zu 7.2.3:
Idee: 1-D-MWS Diff. □

Satz 7.2.4: Satz von Schwarz II

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $U \subseteq G$ offen, $x^{(0)} \in U$, $f \in \mathrm{C}^{(1)}(G, \mathbb{R}^m)$ und es existiere $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ in U, stetig in $x^{(0)}$.
$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existiert in $x^{(0)}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x^{(0)}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\left(x^{(0)}\right)$
(Verallgemeinerung von 7.2.3)

Also gilt: In $\mathrm{C}^{(k)}(G, \mathbb{R}^m)$ sind die gemischten Ableitungen bis einschließlich Ordnung k unabhängig von der Reihenfolge der Bildung.

$$\frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3} = \partial_1\left(\partial_2^2(\partial_3 f)\right) = \partial_2(\partial_3(\partial_2(\partial_1 f))) = \dots$$

Beispiel 7.2.5:

Die Stetigkeitsvoraussetzung an die 2. Ableitung kann nicht entfallen:

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x,y) &= \left(\frac{y^3\left(x^2+y^2\right) - xy^3 2x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x3y^2\left(x^2+y^2\right) - xy^3 2y}{(x^2+y^2)^2} \right) \\ &= \left(\frac{y^3\left(y^2-x^2\right)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{xy^2\left(3x^2+y^2\right)}{(x^2+y^2)^2} \right); \ (x,y) \neq (0,0) \end{aligned}$$

$$\text{in } (0,0): \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-0}{h} = 0$$

$\Rightarrow f$ überall diffbar,

- auf y-Achse: $f_x(0,y) = \frac{y^3(y^2-0)}{(0+y^2)^2} = y$
- auf x-Achse: $f_y(x,0) = 0$

auch für $x = y = 0$.
$\Rightarrow f_{xy}(0,y) = 1,\ f_{yx}(x,0) = 0\ \forall y,x$
$\Rightarrow f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$

Sind die Voraussetzungen vom Satz von Schwarz nicht erfüllt?

$$f_x(x,y) = \frac{y^5 - y^3x^2}{(x^2+y^2)^2}\ (x,y) \neq (0,0)$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\left(5y^4 - 3y^2x^2\right)\left(x^2+y^2\right)^2 - y^3\left(y^2-x^2\right)2\left(x^2+y^2\right)2y}{(x^2+y^2)},\ (x,y) \neq (0,0)$$

$\Rightarrow$ (für $x \neq 0$) $f_{xy}(x,0) = 0 \underset{x\to 0}{\not\to} f_{xy}(0,0) = 1$ nicht stetig!

Definition 7.2.6: HESSEMATRIX

$f: G \to \mathbb{R}$ besitze *alle* (d.h. auch die gemischten) partiellen Ableitungen 2. Ordnung.
Dann heißt

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x) & \cdots & f_{x_1x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x) & \cdots & f_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix}$$

Hessematrix (*Hessian*) von f in $x \in G$.

Achtung: *Jacobian* = Jacobi-Determinante, *Hessian* = Hesse-Matrix

Für $f \in C^{(2)}(G)$ ist $H_f(x)$ eine symmetrische Matrix (d.h. $H_f(x)^T = H_f(x)$) wegen Satz von Schwarz.

7.3 Zentrale Sätze

Satz 7.3.1: Kettenregel

Sei $f:\mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$, $g:\mathbb{R}^m \supseteq V \to \mathbb{R}^p$, $f(U)\subseteq V$ und f in $\xi \in \mathring{U}$, g in $\eta := f(\xi) \in \mathring{V}$ diffbar.
$\Rightarrow h := g\circ f : U \to \mathbb{R}^p$ $(x \mapsto g(f(x)))$ in ξ diffbar und

$$h'(\xi) = g'(f(\xi))f'(\xi)$$

Multiplikation von Jacobi-Matrizen

$$p\times n = p\times m \cdot m\times n$$

somit gilt für die (i,j)-te Komponente von $h'(\xi)$:

$$\left(h'(\xi)\right)_{i,j} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\xi) = \sum_{k=1}^{m}\left(g'(\eta)\right)_{i,k}\cdot\left(f'(\xi)\right)_{k,j} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(\eta)\cdot\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\xi)$$

Korollar 7.3.2:

Sei $G\subseteq\mathbb{R}^n$ Gebiet, $g\in C^{(1)}\left(G,\mathbb{R}^1\right)$, $x^{(0)}\in G$, $v\in\mathbb{R}^n$, $|v|=1$.
Dann existiert die Richtungsableitung von g in $x^{(0)}$ in Richtung v und

$$\frac{\partial g}{\partial v}\left(x^{(0)}\right) = \left(\operatorname{grad} g\left(x^{(0)}\right)\right)\cdot v$$

(euklidisches Skalarprodukt)

Beweis zu 7.3.2:

Sei $f(t) := x^{(0)} + t\cdot v$, $t\in\mathbb{R}$ hinreichend klein, sodass $f(t)\in G$.
$f'(t) = v \ \forall t$, $f(0) = x^{(0)}$
$(g\circ f)(t) = g(f(t)) = g\left(x^{(0)}+tv\right)$; $g\circ f:\mathbb{R}\supseteq D\to\mathbb{R}$ (1-D-Funktion).
Sei $D := \mathcal{U}_\varepsilon(0)$.

$$(g\circ f)'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(h)-(g\circ f)(0)}{h} \quad \text{(1-D-Funktion)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{g\left(x^{(0)}+hv\right)-g\left(x^{(0)}\right)}{h} \overset{\text{Def.}}{=} \frac{\partial g}{\partial v}\left(x^{(0)}\right) \quad \text{(mehr-D-Funktion)}$$

Nach Kettenregel: $(g\circ f)'(0) = \underbrace{g'(f(0))}_{\substack{=\operatorname{grad} g(f(0))\\ =\operatorname{grad} g\left(x^{(0)}\right)}}\cdot\underbrace{f'(0)}_{=v}$ □

Bemerkung 7.3.3:

Sei $a,b\in\mathbb{R}^n$. $\Rightarrow a\cdot b = |a|\cdot|b|\cdot\cos\sphericalangle(a,b)$, d.h. $a\cdot b\le|a||b|$, also:

$$\frac{\partial g}{\partial v}\left(x^{(0)}\right)\le\left|\operatorname{grad} g\left(x^{(0)}\right)\right|$$

und

$$\frac{\partial g}{\partial v}\left(x^{(0)}\right) = \left|\operatorname{grad} g\left(x^{(0)}\right)\right| \Leftrightarrow v\upuparrows\operatorname{grad} g\left(x^{(0)}\right) \Leftrightarrow v = \frac{\operatorname{grad} g\left(x^{(0)}\right)}{\left|\operatorname{grad} g\left(x^{(0)}\right)\right|} \text{ wenn } \operatorname{grad} g\left(x^{(0)}\right)\ne 0$$

d.h. $\operatorname{grad} g\left(x^{(0)}\right)$ ist in $x^{(0)}$ die **Richtung des steilsten Anstiegs** der Höhenlinien von g.

Beispiel 7.3.4: Polarkoordinaten

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi;\ r \in \mathbb{R}_0^+,\ \varphi \in [0, 2\pi[$

$$f(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$g(x,y) = e^{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow (g\circ f)(r,\varphi) = g(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) = e^{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = e^{r^2}$$
$$\Rightarrow (g\circ f)'(r,\varphi) = \left(\frac{\partial(g\circ f)}{\partial r}(r,\varphi),\ \frac{\partial(g\circ f)}{\partial\varphi}(r,\varphi)\right) = \left(2re^{r^2}, 0\right)$$

Kettenregel:

$$g'(x,y) = \left(2xe^{x^2+y^2},\ 2ye^{x^2+y^2}\right)$$

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(r,\varphi) &= g'(f(r,\varphi))\cdot f'(r,\varphi)\\ &= \left(2r\cos(\varphi)e^{r^2},\ 2r\sin(\varphi)e^{t^2}\right)\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}\\ &= \left(2r\cos^2(\varphi)e^{r^2} + 2r\sin^2(\varphi)e^{r^2},\ -2r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)e^{r^2} + 2r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)e^{r^2}\right)\\ &= \left(2re^{r^2},\ 0\right)\end{aligned}$$

Satz 7.3.5:

Seien $F \in C^{(2)}(G,\mathbb{R})$, $f \in C^{(2)}(G,\mathbb{R}^3)$, $G \subseteq \mathbb{R}^3$ Gebiet. Dann gilt:

a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} F)^T = 0$
b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$
c) $\Delta f = (\operatorname{grad}\operatorname{div} f)^T - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} f)$
(Δ ist komponentenweise zu verstehen)

Definition 7.3.6: (Mehrdimensionale) Stammfunktion

Seien $f: G \to \mathbb{R}^n$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet.
f besitzt eine **Stammfunktion** oder **Potenzial** $F: G \to \mathbb{R}$, falls $f = \nabla F$ auf G.
f heißt dann **Gradientenfeld**.

Korollar 7.3.7: Integrabilitätsbedingung

Sei $f \in C^{(1)}(G,\mathbb{R}^3)$ Gradientenfeld, $G \subseteq \mathbb{R}^3$ Gebiet.

$$\Rightarrow \operatorname{rot} f = 0 \text{ in } G$$

Die Umkehrung gilt i.A. nicht!

Übung 7.3.Ü1: Gegenbeispiel zur Umkehrung der Integrabilitätsbedingung von Gradientenfeldern

Sei $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$.
Es ist $\operatorname{rot} f = 0$, aber f ist kein Gradientenfeld.

Satz 7.3.8: MWS Diff (mehrdimensional)

Sei $f:G\to\mathbb{R}$ diffbar, $G\subseteq\mathbb{R}^n$ Gebiet, $a,b\in G$, sodass $\overline{ab}\subset G$ (wobei $\overline{ab}:=\{a+\lambda(b-a)\,|\,\lambda\in\,]0,1[\,\}$).
Dann gilt:

$$\exists\xi\in\overline{ab}: f(b)-f(a)=(\operatorname{grad} f(\xi))\cdot(b-a)$$

Beweis zu 7.3.8:
1-D-MWS Diff:

$$g(t):=f(a+t(b-a)) \text{ auf } [0,1]$$

„Parametrisierung der Strecke“: g ist stetig auf $[0,1]$, diffbar auf $]0,1[$, also:

$$\exists\tau\in\,]0,1[\,:\operatorname{grad} f\big(\underbrace{a+\tau(b-a)}_{=:\,\xi}\big)\cdot(b-a)\overset{\text{Kettenregel}}{=}g'(\tau)=\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=f(b)-f(a)$$

□

Definition 7.3.9: Multiindizes

$\alpha:=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}_0{}^n$ heißt bei der Verwendung in Summen/Produkten **Multiindex**, und es ist:

$$h^\alpha:=\prod_{i=1}^n h_i^{\alpha_i}=h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n} \text{ für } h\in\mathbb{R}^n$$

$$|\alpha|:=\sum_{i=1}^n\alpha_i=\alpha_1+\dots+\alpha_n$$

$$\alpha!:=\prod_{i=1}^n\alpha_i!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$$

$$\mathrm{D}^\alpha:=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha}}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \text{ (\textbf{Differentialoperator})}$$

Satz 7.3.10: Satz

7.3.10'Satz von Taylor (mit Multiindizes) Sei $G\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f\in\mathrm{C}^{(r+1)}(G,\mathbb{R})$, $r\in\mathbb{N}$, $\xi,\xi+h\in G$, sodass $\overline{\xi(\xi+h)}\subseteq G$.

$$\Rightarrow f(\xi+h)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|\le r}}\frac{1}{\alpha!}\mathrm{D}^\alpha f(\xi)h^\alpha+R_r$$

$$R_r=\sum_{|\alpha|=r+1}\frac{1}{\alpha!}\mathrm{D}^\alpha f(\xi+\vartheta h)h^\alpha=\int_0^1\frac{(1-t)^r}{r!}\sum_{|\alpha|=r+1}\mathrm{D}^\alpha f(\xi+th)h^\alpha\,\mathrm{d}t$$

für ein geeignetes $\vartheta\in\,]0,1[$.

Übung 7.3.Ü2: Multinomialsatz

Sei $h\in\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^n h_i\right)^k=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|=k}}\frac{k!}{\alpha!}h^\alpha$$

Beweis:
Idee: Satz von Taylor (mehrdimensional). □

Satz 7.3.11: Extrema ohne Nebenbedingung

a) **Fermat'sches Kriterium** für lokale Extrema:
Sei $f \in C^{(1)}(G)$ (also: $f: G \to \mathbb{R}^1$).
Damit f in $x^{(0)} \in G$ ein lokales Minimum oder lokales Maximum besitzt, ist *notwendig*:

$$\underbrace{\operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right)}_{=f'\left(x^{(0)}\right)} = 0 \Leftrightarrow: x^{(0)} \text{ **stationärer/kritischer Punkt** von } f$$

b) Seien $f \in C^{(2)}(G)$, $\operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right) = 0$.
Hinreichend für ein strenges lokales | Minimum / Maximum | von f in $x^{(0)} \in G$ ist, dass die Hesse-Matrix $H_f\left(x^{(0)}\right)$ von f in $x^{(0)}$ | positiv / negativ | definit ist.
Es liegt kein lokales Minimum/Maximum vor, falls $H_f\left(x^{(0)}\right)$ indefinit ist.
Ist $H_f\left(x^{(0)}\right)$ *semi*definit, so ist keine allgemeine Aussage über Extrema in $x^{(0)}$ möglich.

Aus reeller linearer Algebra: Definitheit einer Matrix

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix.

- A heißt **positiv semidefinit** $:\Leftrightarrow x^{\mathrm{T}}Ax \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- A heißt **positiv definit** $:\Leftrightarrow$ A positiv semidefinit und $x^{\mathrm{T}}Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- A heißt **negativ definit** $:\Leftrightarrow -A$ positiv definit.
- A heißt **indefinit** $:\Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R}^n : x^{\mathrm{T}}Ax > 0,\ y^{\mathrm{T}}Ay < 0$

A ist positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind ≥ 0 (d.h. in $\mathbb{R}_0^+$)
$\Leftrightarrow$ alle Hauptminoren sind ≥ 0 (d.h. in $\mathbb{R}_0^+$)

A ist positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind > 0 (d.h. in $\mathbb{R}^+$)
$\Leftrightarrow$ alle Hauptminoren sind > 0 (d.h. in $\mathbb{R}^+$)

Achtung! Alle Hauptminoren $< 0 \not\Rightarrow A$ negativ definit!

Die **Minoren** von A sind die Determinanten der quadratischen Teilmatrizen von A.
Die **Hauptminoren** sind die Determinanten der quadratischen Teilmatrizen von A, die durch Streichen der letzten Zeile(n) und letzten Spalte(n) von A entstehen,
d.h. die k-te Hauptminore ist $H_k := \det\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k,1} & \cdots & A_{k,k}\end{pmatrix}$ für $k \in \underline{n}$.

Bsp.: Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$. Dann sind die Hauptminoren: $H_1 := \det\left(1\right)$, $H_2 := \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $H_3 := \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

Beweis zu 7.3.11:

a) Sei $g(t) := f\left(t, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$. $\Rightarrow g$ ist 1-D-Funktion und hat lokales Extremum bei $t = x_1^{(0)}$.

$$\Rightarrow g'\left(x_1^{(0)}\right) = 0 \text{ per Def.}$$

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(t, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) = 0$$

Analog: $\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) = 0\ \forall k \in \underline{n}$

b) Taylor: $\exists \vartheta \in \,]0,1[\, : f\left(x^{(0)} + \underbrace{h}_{\in \mathcal{U}_\varepsilon(0)}\right) = f\left(x^{(0)}\right) + \operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right) \cdot h + \frac{1}{2} h^{\mathrm{T}} H_f\left(x^{(0)} + \vartheta h\right) h \qquad (*)$

H_f stetig, da $f \in C^{(2)}$: Wenn $H_f\left(x^{(0)}\right)$ positiv definit ist, dann existiert δ-Umgebung von $x^{(0)}$, in der H_f positiv definit ist. (Analog für negativ definit.)

Also: $H_f \left| \begin{array}{c} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right|$ definit $\Rightarrow H_f\left(x^{(0)} + \vartheta h\right) \left| \begin{array}{c} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right|$ definit, für h hinr. nahe bei 0 (z.B. $|h| < \delta$).

$H_f\left(x^{(0)}\right) \left| \begin{array}{c} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right|$ definit $\Rightarrow f\left(x^{(0)} + h\right) - f\left(x^{(0)}\right) = \frac{1}{2} h^{\mathrm{T}} H_f\left(x^{(0)} + \vartheta h\right) h \left| \begin{array}{c} > 0 \\ < 0 \end{array} \right| \ \forall h \in \mathcal{U}_\delta(0)$

$\Rightarrow f$ lokal $\left| \begin{array}{c} \text{minimal} \\ \text{maximal} \end{array} \right|$ in $x^{(0)}$.

Nun noch: Sei $H_f\left(x^{(0)}\right)$ indefinit, d.h. $\exists a, b \in \mathbb{R}^n : a^{\mathrm{T}} H_f\left(x^{(0)}\right) a > 0$ und $b^{\mathrm{T}} H_f\left(x^{(0)}\right) b < 0$.
Sei $\mathcal{U}_\varepsilon\left(x^{(0)}\right)$ *beliebige* ε-Umgebung von $x^{(0)}$, $\varepsilon > 0$ *beliebig* klein.

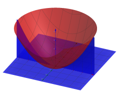
Für $h = \frac{a}{|a|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \in \mathcal{U}_\varepsilon(0) \Rightarrow h^{\mathrm{T}} H_f\left(x^{(0)}\right) h > 0 \overset{\text{wie oben}}{\Longrightarrow} f\left(x^{(0)} + h\right) > f\left(x^{(0)}\right)$

Für $h = \frac{b}{|b|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \in \mathcal{U}_\varepsilon(0) \Rightarrow h^{\mathrm{T}} H_f\left(x^{(0)}\right) h < 0 \overset{\text{wie oben}}{\Longrightarrow} f\left(x^{(0)} + h\right) < f\left(x^{(0)}\right)$

$\Rightarrow$ kein Extremum.

□

Beispiel 7.3.12:



a) $f(x,y) := x^2 + y^2$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x,\ 2y) = (0,0)$
$\Leftrightarrow 2x = 0 \wedge 2y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ positiv definit $\forall (x,y)$

$\Rightarrow$ (lokales) Minimum bei $(0,0)$

b) $f(x,y) := x + y$, $\operatorname{grad} f(x,y) = (1,1) \neq (0,0)\ \forall (x,y)$
$\Rightarrow$ kein Extremum (und da definiert auf ganz $\mathbb{R}^2$, kann es auch keine Randextrema geben).

c) $f(x,y) := x \cdot y$, $\operatorname{grad} f(x,y) = (y,x) = (0,0) \Leftrightarrow x = y = 0$

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ indefinit

denn $a^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} a = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = a_1 a_2 + a_2 a_1 = 2 a_1 a_2 = \begin{cases} > 0 & a = \binom{1}{1} \\ < 0 & a = \binom{1}{-1} \end{cases}$

$\Rightarrow$ kein Extremum

d) $f(x,y) := x^2 + y^4$

$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(2x,\ 4y^3\right) = (0,0) \Leftrightarrow x = y = 0$

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$, $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ positiv semidefinit

$\Rightarrow$ keine allgemeine Aussage möglich.
Hier im konkreten Beispiel: $f(x,y) \geq 0$ und $f(0,0) = 0 \Rightarrow$ Minimum.
Aber: $f(x,y) := x^2 + y^3$, gleiche Situation ($x^{(0)} = (0,0)$, $H_f\left(x^{(0)}\right)$ positiv semidefinit),

$$f(0,0) = 0,\ f(0,\varepsilon) = \varepsilon^3 \begin{cases} > 0 & \varepsilon > 0 \\ < 0 & \varepsilon < 0 \end{cases}$$

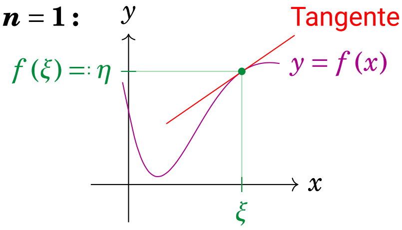
$\Rightarrow$ kein Extremum.

7.4 Geometrisches

Beispiel 7.4.1: TANGENTEN

Sei $f:\mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ Funktion, $x_{n+1} := f(x_1,\dots,x_n)$ Kurve/Fläche in $\mathbb{R}^{n+1}$.

$\boldsymbol{n=1:}$



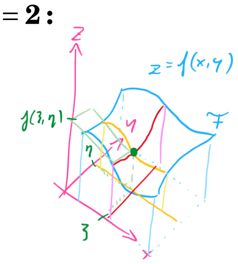
Tangente in (ξ,η): Steigung $f'(\xi)$

Tangente $y = f'(\xi)x + \beta$ (affin linear)

Wegen $f(\xi) = \eta$ ist $\eta = f'(\xi)\xi + \beta \Leftrightarrow \beta = \eta - f'(\xi)\xi$,

also $y = f'(\xi)(x-\xi) + \eta$

$\boldsymbol{n=2:}$



Tangente in x-Richtung:

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)\cdot(x-\xi) + f(\xi,\eta)$$

Tangente in y-Richtung:

$$z = \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\cdot(y-\eta) + f(\xi,\eta)$$

Tangentialebene an $\mathcal{F}$ in (ξ,η,ζ)

$$\begin{aligned}(x,y) \mapsto z &= \zeta + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)(x-\xi) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\cdot(y-\eta)\\ &= \zeta + \operatorname{grad} f(\xi,\eta)\cdot\begin{pmatrix} x-\xi\\ y-\eta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Äquivalente Form:

$$\Big(\underbrace{\operatorname{grad} f(\xi,\eta)}_{=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta),\ \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\right)},\ -1\Big)\cdot\begin{pmatrix} x-\xi\\ y-\eta\\ z-\zeta\end{pmatrix} = 0$$

Definition 7.4.1′: TANGENTIALHYPEREBENE

$\boldsymbol{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}:}$

$x \in G \subseteq \mathbb{R}^n$, f wie oben: Tangente in $x^{(0)}$ in x_i-Richtung:

$$x_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right)\left(x_i - x_i^{(0)}\right) + f\left(x^{(0)}\right)$$

Tangentialhyperebene:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f\left(x^{(0)}\right) + \left(\operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right)\right)\left(x - x^{(0)}\right)\\ \Leftrightarrow 0 &= \underbrace{\begin{pmatrix}\nabla f\left(x^{(0)}\right)\\ -1\end{pmatrix}}_{\substack{\text{Normale auf } \mathcal{F}\\ \text{in } \left(x^{(0)}, f\left(x^{(0)}\right)\right)}}\cdot\begin{pmatrix} x - x^{(0)}\\ x_{n+1} - f\left(x^{(0)}\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

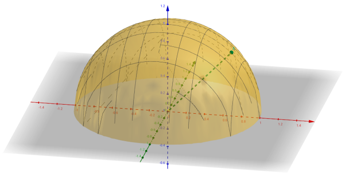
∇f ist die Projektion der Normalen auf G.

Tangentialvektoren: $t_{x_i} = \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right)\right)^{\mathrm{T}}$ mit 1 in der i-ten Komponente

Tangentialraum: $\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i t_{x_i} \,\middle|\, \lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \underline{n}\right\}$

Beispiel 7.4.2: Halbkugel (Einheitskugel)

$$z := \sqrt{1-x^2-y^2} = f(x,y)$$



$$\nabla f = \left(\frac{1\cdot(-2x)}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)^{\mathrm{T}} = \left(-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z}\right) = \frac{1}{z}(x,y)$$

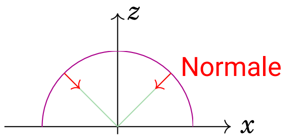
Normale: $z \neq 0$

$$\begin{pmatrix} -\frac{x}{z} \\ -\frac{y}{z} \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{z}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = n$$

in $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Tangentialvektoren:

$$t_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{z} \end{pmatrix}, \quad t_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{z} \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{R}^1$ bzw. $\mathbb{R}^2$:



7.5 Umkehrsatz, implizite Funktionen und Lagrange-Multiplikatoren

Zur Erinnerung: 1-D-Fall

Sei $f:[a,b] =: I \to f(I), f \in C^{(1)}(I)$.
$f' \neq 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist streng monoton mit Vorzeichen von f'.
$\Rightarrow \exists f^{-1} =: g$, diffbar auf $f(I)$ (Definitionsbereich) und $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$.

Jetzt: $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = y$, $x = ?$

Definition 7.5.1: Regularität und Invertierbarkeit (mehrdimensional)

$f: \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^n$ heißt

a) in $x^{(0)} \in G$ **regulär** (*regular*), wenn
   (i) f in einer Umgebung von $x^{(0)}$ stetig total diffbar
   (ii) $\det f'\left(x^{(0)}\right) \neq 0$ (Jacobi-Determinante)

   $x^{(0)}$ heißt dann **regulärer Punkt** von f.
b) auf G regulär, wenn f in jedem $x^{(0)} \in G$ regulär ist.
c) in $x^{(0)}$ **lokal invertierbar**, falls eine Umgebung U von $x^{(0)}$ und V von $y^{(0)} := f\left(x^{(0)}\right)$ existieren, sodass $f\big|_U : U \to V$ bijektiv ist.
d) in G lokal invertierbar, falls f in jedem Punkt $x^{(0)} \in G$ lokal invertierbar ist.
   $\not\Rightarrow f$ global invertierbar (d.h. $f\big|_G$ bijektiv)!

Lemma 7.5.2:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \in G$.

a) $x^{(0)}$ regulärer Punkt $\Rightarrow \exists$ Umgebung U von $x^{(0)}$, auf der f regulär ist.

b) Die Menge der regulären Punkte von f ist offen.

Beweis zu 7.5.2:

a) Bedingung (i): ✓; Bedingung (ii): $\underbrace{\det}_{\text{stetig}} \underbrace{f'(x)}_{\text{stetig}}$ stetig ✓

b) $x^{(0)}$ in der Menge $\overset{\text{a)}}{\Longrightarrow}$ $x^{(0)}$ innerer Punkt

□

Vorbemerkung 7.5.3:

a) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kann als Element von $\mathbb{R}^{n^2}$ aufgefasst werden.
$\|\cdot\|$ sei Matrixnorm, $|\cdot|$ sei Norm im $\mathbb{R}^n$.
Beide nennt man **verträglich**, falls

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \text{ und } |Ax| \leq \|A\| \, |x| \;\; \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n},\; x \in \mathbb{R}^n$$

b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $f: M \to f(M)$ stetig und injektiv.
$\Rightarrow f^{-1}: f(M) \to M$ stetig (analog 1-D)

c) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Umgebung von $x \in U$, wenn x innerer Punkt von U ist.

Übung 7.5.Ü1: Verträgliche Normen

Für $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ sind die euklidischen Normen

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x^2} \text{ und } \|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2}$$

verträglich.

Satz 7.5.4: Umkehrsatz / Satz von der inversen Abbildung

Seien $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}^n$ und f in $x^{(0)} \in G$ regulär.
Dann ist f lokal invertierbar: $\exists$ *offene* Umgebung U von $x^{(0)}$ mit:

(1) $V := f(U)$ ist offene Umgebung von $y^{(0)} := f\left(x^{(0)}\right)$

(2) $f|_U : U \to V$ ist bijektiv, $\exists g := \left(f|_U\right)^{-1} : V \to U$

(3) g ist diffbar, $g' = (f')^{-1} \circ g = (f' \circ g)^{-1}$, d.h.

$$\left(\left(f|_U\right)^{-1}\right)'(y) = \left(f'(x)\right)^{-1} \qquad \text{mit } x = g(y)$$

$(f'(x))^{-1}$ ist inverse Jacobi-Matrix.

Beweis zu 7.5.4:

Banach'scher Fixpunktsatz.

Alternativer Beweis geht über Newton-Verfahren, das man wiederum mit dem Banach'schen Fixpunktsatz beweist. Die Vollständigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist für den Umkehrsatz sehr wichtig.

□

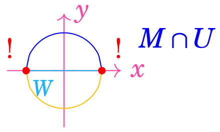
Satz 7.5.5: Satz über implizite Funktionen

Voraussetzung: $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$, $G \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen,
$f : G \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar.

$M := \{(x,y) \in G \,|\, f(x,y) = 0\} \neq 0$,
d.h. $\exists \left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) \in G : f\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = 0$, und für dieses $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ gelte:

$$\det\Bigg(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)}_{:= \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)\right)_{\substack{i \in \underline{m} \\ j \in \underline{n}}}}\Bigg) \neq 0$$

z.B.: $n = 1,\ m = 1,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$
M: Einheitskreis
$x^{(0)} := y^{(0)} := \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \neq 0$ für $y = y^{(0)}$



Behauptung: $\exists$ offene Umgebungen $U \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ von $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ und $W \subseteq \mathbb{R}^n$ von $x^{(0)}$, und $\exists g \in C^{(1)}(W, \mathbb{R}^m)$, sodass

$$M \cap U = \{(x,y) \in U \,|\, f(x,y) = 0\} = \{(x, g(x)) \,|\, x \in W\}$$

d.h. M ist **explizit darstellbar** durch den Graphen von $y = g(x)$, also
$f(x,y) = 0,\ (x,y) \in U \Leftrightarrow y = g(x),\ x \in W$.

z.B. $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$,
$W =]-1, 1[$,
$g(x) := \sqrt{1 - x^2}$.
Dann ist:
$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \,|\, 1 - x^2 - y^2 = 0\}$
$= \left\{\left(x, \sqrt{1 - x^2}\right) \,\middle|\, x \in]-1, 1[\right\}$

d.h. letztendlich: „Kann man ein (nicht-lineares) GLS nach bestimmten Variablen auflösen?“
reiner Existenzsatz!

Beweis zu 7.5.5:
Umkehrsatz. □

Korollar 7.5.6:

Unter obiger Voraussetzung gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}$$

in einer Umgebung von $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$.

Beweis zu 7.5.6:
$f(x, g(x)) = 0 \ \forall x \in W$.
Daraus folgt mit Kettenregel:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=g(x)} \cdot \begin{pmatrix} I_n \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}\right)\Bigg|_{y=g(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}}_{m \times n} = -\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1}}_{m \times m} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{m \times n}, \text{ denn } \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1} \text{ existiert in Umgebung von } \left(x^{(0)}, y^{(0)}\right).$$

□

Bemerkung: Eventuell Variablen $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ umordnen, allgemein:

$$\operatorname{Rang}\left(f'\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)\right) \text{ maximal (d.h. } = m)$$

wieder: **reiner Existenzsatz**.

Extrema mit Nebenbedingungen (Nb.)

z.B.: minimiere $f(x) = e^{x_1^3+x_2^2}$ unter allen x mit $|x|^2 = 1$ $(g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0)$.

Idee: Einsetzen von $x_2 = \pm\sqrt{1-x_1^2}$. Aber: $\sqrt{x^2} = |x|$ in 0 nicht differenzierbar...

besser:

Satz 7.5.7: Lagrange-Multiplikator-Regel

(**nicht** die „Multiplikator-Regel von Lagrange“, sondern die „Regel des Lagrange-Multiplikators“!)

Voraussetzung: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{(1)}(G, \mathbb{R}^1)$, $g \in C^{(1)}(G, \mathbb{R}^m)$, $n > m$, d.h. mehr Variablen als Nebenbedingungen.

f habe in $x^{(0)}$ ein lokales $\left|\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}\right|$ unter der Nebenbedingung $g\left(x^{(0)}\right) = 0$,

d.h. $x^{(0)} \in M := \{x \in G \mid g(x) = 0\}$ und $\exists$ Umgebung $\mathcal{U}\left(x^{(0)}\right)$ mit $f(x) \left|\begin{matrix}\leq\\\geq\end{matrix}\right| f\left(x^{(0)}\right)$ $\forall x \in \left(\mathcal{U}\left(x^{(0)}\right) \cap M\right)$.

Ferner gelte: $\operatorname{Rang} \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}\left(x^{(0)}\right)}_{m\times n} = m$

Behauptung: Dann existiert ein (Lagrange-)Multiplikator $\lambda^{(0)} := \left(\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^m$, sodass die **Lagrange-Funktion**

$$L(x, \lambda) := f(x) + \lambda \cdot g(x) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}^m, \text{ Skalarprodukt})$$

in $\left(x^{(0)}, \lambda^{(0)}\right)$ *stationär* ist, d.h. $\frac{\partial L}{\partial x}\left(x^{(0)}, \lambda^{(0)}\right) = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda}\left(x^{(0)}, \lambda^{(0)}\right) = 0$.

Beweis zu 7.5.7:

Satz über implizite Funktionen. □

Beispiel 7.5.8:

a) $G \subseteq \mathbb{R}^n,\ f \in C^{(1)}(G,\mathbb{R})$ definiert **Niveauflächen**: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\} =: M_c,\ c \in \mathbb{R}$ konstant.

Sei (z.B.) $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^{(0)}) \neq 0,\ x^{(0)} \in M_c \overset{\text{impl. Fkt.}}{\Longrightarrow}$ lokal auflösbar $x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ in Umgebung.

Normalenvektor zu M_c in Umgebung von $x^{(0)}$:

$$n = \begin{pmatrix} \nabla g \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} \\ -1 \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \underbrace{-\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{-1}}_{\text{Skalar}} \nabla f$$

$\Rightarrow$ Fläche, die durch $f(x) = \text{const.}$ gegeben ist, hat Normalenvektor ∇f.

z.B. Isobaren (Linien gleichen Luftdrucks)

„$\nearrow$" Druckgradient (Richtung des steilsten Anstiegs) ist senkrecht zur Isobare.

b) Welches Rechteck hat bei gegebenem Umfang maximalen Flächeninhalt?

Rechteckfläche $A(a,b) = ab$, Umfang $U(a,b) = 2a + 2b \overset{!}{=} \gamma$, d.h. $g(a,b) := 2a + 2b - \gamma \overset{!}{=} 0$.

1 Nebenbedingung $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}^1$.

$$L(a,b,\gamma) = ab + \lambda(2a + 2b - \gamma)$$

Notwendige Bedingung:

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial a} = b + 2\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial b} = a + 2\lambda,}_{\Rightarrow a=b} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2a + 2b - \gamma$$

$\Rightarrow 4a = \gamma \quad \Rightarrow a = b = \frac{\gamma}{4}$

Man kann sich leicht überlegen, dass es ein Maximum geben *muss*. Also ist dies durch das Quadrat ($a = b = \gamma/4$) gegeben.

8 Integration längs Kurven und Wegen

8.1 Kurven und Wege

Definition 8.1.1: KURVE UND WEG

Sei $I := [a, b],\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b$.
Eine stetige Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ heißt **Weg** und ihr Bild $\varphi(I)$ heißt **Kurve**.
Den Weg φ bezeichnet man auch als **Parameterdarstellung** der Kurve.

Weitere Bezeichnungen:

- $\varphi(a)$: Anfangspunkt
- $\varphi(b)$: Endpunkt
- φ ist **geschlossen** $:\Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$
- φ ist **Jordan'scher Weg/doppelpunktfreier Weg** $:\Leftrightarrow \varphi$ injektiv
- φ ist **geschlossener Jordan'scher Weg** $:\Leftrightarrow \varphi$ geschlossen und $\varphi\big|_{]a,b[}$ injektiv
- φ ist **glatt/regulär** $:\Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{C}^{(1)}(I)$ und $\varphi' \neq 0$ auf I
- φ ist **stückweise glatt/stückweise regulär** $:\Leftrightarrow \exists$ endlich viele Punkte $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = b$, sodass $\varphi\big|_{[t_i, t_{i+1}]}$ glatt ist $\forall i \in \{0, \ldots, r\}$.
- φ ist **stückweise stetig diffbar** $:\Leftrightarrow \exists$ endlich viele Punkte $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{r-1} < t_r = b$, sodass $\varphi\big|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \mathrm{C}^{(1)}[t_i, t_{i+1}]\ \forall i \in \{0, \ldots, r\}$.

Entsprechende Begriffe für $\varphi(I)$ übertragen (Jordan'sche Kurve, ...).

Definition 8.1.2: ÄQUIVALENZ VON WEGEN

a) Seien I und J Intervalle.
Zwei Jordanwege $\varphi : I \to \mathbb{R}^n,\ \psi : J \to \mathbb{R}^n$ zur gleichen Kurve $\gamma = \varphi(I) = \psi(J)$ heißen **äquivalent**, wenn es eine streng monoton wachsende Abbildung $h : I \to J$ gibt, sodass $\varphi = \psi \circ h$.
b) Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, $I := [a, b]$. Dann bezeichnet

$$\varphi^- : I \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \varphi(a + b - t)$$

den in umgekehrter Orientierung durchlaufenen Weg.

Satz 8.1.3:

(1) Die Äquivalenz von Wegen ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation.
(2) Zu einer gegebenen Jordankurve $\gamma = \varphi(I)$ gibt es nur zwei Äquivalenzklassen von Wegen: $[\varphi]$ und $[\varphi^-]$. Diese bezeichnet man als die beiden **Orientierungen** der Kurve.

Satz 8.1.4:

Seien $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ *glatte* Jordanwege mit $\varphi \in [\psi]$ oder $\varphi \in [\psi^-]$.
Dann existiert $h : I \to J$ mit $\psi \circ h = \varphi$, wobei h bijektiv ist mit $h \in \mathrm{C}^{(1)}(I)$ und $h' \neq 0$ auf I.

8.2 Weglänge

Gesucht: Länge einer Kurve $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Weg $\varphi : I \to \gamma$.
Idee: Approximation durch Polygonzüge, basierend auf einer Zerlegung Z des Intervalls I (ähnlich wie bei Riemann-Integral).

Definition 8.2.1: Weglänge

Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ ein Weg und Z eine Zerlegung von I (also: $a = t_0 < \cdots < t_r = b$). Dann sei

$$l_\varphi(Z) := \sum_{j=0}^{r-1} \left|\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)\right|$$

Man bezeichnet

$$L(\varphi) := \sup\{l_\varphi(Z) \,|\, Z \text{ Zerlegung von } I\}$$

als die **Weglänge** von φ.
Ist $L(\varphi) < +\infty$, so heißt φ **rektifizierbar**.

Satz 8.2.2:

Seien $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$ zwei beliebige Wege, $I = [a, b]$. Dann gilt:

a) Ist φ Lipschitzsch mit Lipschitzkonstante Λ, so ist φ rektifizierbar mit $L(\varphi) \le \Lambda(b-a)$.
b) Sind φ und ψ rektifizierbar, so ist $\left|L(\varphi) - L(\varphi)\right| \le L(\varphi - \psi)$. (**Dreiecksungl. für Weglängen**)
c) $L(\varphi) \ge \left|\varphi(b) - \varphi(a)\right|$ („Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist eine Strecke.“)

Beweis zu 8.2.2:

a) $\left|\varphi(s) - \varphi(t)\right| = \Lambda|s-t| \;\forall s, t \in I$
Sei Z eine beliebige Zerlegung von I. Dann gilt:

$$l_\varphi(Z) = \sum_{j=0}^{r-1} \left|\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)\right| \le \sum_{j=0}^{r-1} \Lambda\left|t_{j+1} - t_j\right| = \Lambda \underbrace{\sum_{j=0}^{r-1}\left(t_{j+1} - t_j\right)}_{\text{Teleskopsumme}} = \Lambda(t_r - t_0) = \Lambda(b-a)$$

$\Rightarrow L(\varphi) \le \Lambda(b-a)$

b) ($|x| = |x-y+y| \le |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \le |x+y|$; mit vertauschten Rollen $||x| - |y|| \le |x+y|$)

$$\begin{aligned}
\left|l_\varphi(Z) - l_\psi(Z)\right| &= \left|\sum_{j=0}^{r-1}\left(\left|\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)\right| - \left|\psi(t_{j+1}) - \psi(t_j)\right|\right)\right| \\
&\le \sum_{j=0}^{r-1} ||\ldots| - |\ldots|| \le \sum_{j=0}^{r-1} \left|\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j) - \left(\psi(t_{j+1}) - \psi(t_j)\right)\right| \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} \left|(\varphi - \psi)(t_{j+1}) - (\varphi - \psi)(t_j)\right| = l_{\varphi-\psi}(Z) \le L(\varphi - \psi)
\end{aligned}$$

c) $Z := \{a, b\}$ ist auch eine Zerlegung. $L(\varphi) \ge \left|\varphi(t_1) - \varphi(t_0)\right| = \left|\varphi(b) - \varphi(a)\right|$

□

Satz 8.2.3:

Äquivalente Wege haben die gleiche Länge und es gilt außerdem $L(\varphi) = L(\varphi^-)$, d.h. die Weglänge hängt nur von der Kurve ab.

Beweis zu 8.2.3:

Seien $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $\psi : J \to \mathbb{R}^n$, $\varphi \sim \psi$.
$\Rightarrow \exists h : I \to J$ stetig monoton wachsend mit $\psi \circ h = \varphi$.
Sei Z Zerlegung von $I \Rightarrow Z' := \{h(t) \,|\, t \in Z\}$ definiert Zerlegung von J, $h(t_j) < h(t_{j+1}) \;\forall j$.

$$l_\varphi(Z) = \sum_{j=0}^{r-1} \left|\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)\right| = \sum_{j=0}^{r-1} \left|\psi(h(t_{j+1})) - \psi(h(t_j))\right| = l_\psi(Z')$$

und umgekehrt, da h bijektiv ist. $\Rightarrow L(\varphi) = L(\psi)$
Ferner: Z Zerlegung von $I \Rightarrow \{a+b-t \mid t \in Z\} =: Z'$ Zerlegung von I.

$$l_\varphi(Z) = l_{\varphi^-}(Z') \Rightarrow L(\varphi) = L(\varphi^-)$$

□

Man kann deshalb auch von einer **Kurvenlänge** sprechen, also $L(\varphi(I)) := L(\varphi)$.

Ist $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, dann ist $\varphi|_{[a,t]}\ \forall t \in]a,b]$ auch ein Weg.

Definition 8.2.4: Bogenlänge

Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg.
Dann heißt $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$s(t) := \begin{cases} 0 & t = a \\ L\left(\varphi|_{[a,t]}\right) & t > a \end{cases}$$

Weglänge oder **Bogenlänge**.

Satz 8.2.5:

Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar. Dann ist die zugehörige Bogenlänge s auf I stetig und monoton wachsend.
Ist φ ein Jordanweg, so ist s streng monoton wachsend.
Ist φ (stückweise) stetig diffbar, dann ist s auch (stückweise) stetig diffbar und

$$s(t) = \int_a^t \left|\varphi'(\tau)\right| \mathrm{d}\tau \quad \forall t \in I$$

Beispiel 8.2.6:

a) Kreisumfang:

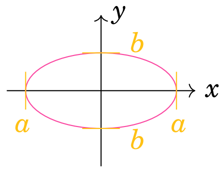
$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix},\ t \in [0,2\pi]$$

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left|\begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix}\right| \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}t = 2\pi r$$

Fläche? → Analysis III.

b) Umgang einer Ellipse:

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix},\ t \in [0,2\pi],\ \text{hier: } a > b$$



$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$$

$$|\varphi'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben durch $a^2 = b^2 + \varepsilon^2$. ε heißt **lineare Exzentrizität**.

$$|\varphi'(t)| = \sqrt{b^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + \varepsilon^2\sin^2 t}$$

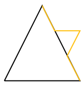
$$\Rightarrow L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + \varepsilon^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow L(\varphi) = b\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{b}\right)^2 t}\,\mathrm{d}t$$

Dieses Integral ist nicht weiter auflösbar.
Es existieren viele solcher Integrale. Im Gegensatz zu Ableitungen, die es immer eindeutig gibt, kann man manche Integrale nicht eindeutig auflösen. Diese kann man dann nur numerisch näherungsweise ausrechnen.
Ein solches Integral heißt **elliptisches Integral**.

Beispiel 8.2.6:

c) Wir konstruieren eine Kurve iterativ:


$\longrightarrow \cdots$

Der Limes heißt **Kochkurve**. Nicht rektifizierbar → **Fraktale Geometrie**.

d) Die Länge eines Graphen:
Sei $f \in C^{(1)}[a,b]$ und $\Gamma := \{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$ der zugehörige Graph.
Parametrisierung mit x:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix},\ t \in [a,b]$$

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, \mathrm{d}t$$

e) Parametrisierung über Bogenlänge: Beispiel Einheitskreis.

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},\ t \in [0, 2\pi]$$

$$s(t) = \int_0^t \left|\varphi'(\tau)\right| \mathrm{d}\tau = t$$

d.h. dies ist schon eine Parametrisierung über die Bogenlänge.
Kreis mit Radius r:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$$

$$s(t) = \int_0^t r\, \mathrm{d}\tau = rt$$

Parametrisierung über die Bogenlänge:

$$\widetilde{\varphi}(s) = \begin{pmatrix} r\cos\left(\frac{s}{r}\right) \\ r\sin\left(\frac{s}{r}\right) \end{pmatrix},\ s \in [0, 2\pi]$$

Denn mit der Bogenlänge kann man ein paar Dinge einfacher machen.

Bemerkung 8.2.7: Tangente und Normale

Interpretiert man eine Kurve als eine Bahn $x(t)$, so ist die Tangente an der Bahn in $x(t_1)$ gleich der Geschwindigkeit $\dot{x}(t_1) := x'(t_1)$.
Sekante durch $x(t_1)$ und $x(t_2)$:

$$\psi(t) = x(t_1) + \frac{t}{t_2 - t_1}(x(t_2) - x(t_1)) \begin{cases} t = 0: \ \psi(0) = x(t_1) \\ \psi(t_2 - t_1) = x(t_2) \end{cases}$$

$\lim\limits_{t_2 \to t_1}$ ergibt: $x(t_1) + t\dot{x}(t_1)$ Tangente
Vgl. Definition der totalen Ableitung von $t \mapsto x(t)$ in t_1:

$$x(t_1 + h) = \underbrace{x(t_1) + \dot{x}(t_1)h}_{\substack{\text{Tangente} \\ \text{(mit } h \text{ als Parameter)}}} + o(|h|) \text{ für } h \to 0$$

Hängt die Tangente von der Parametrisierung ab?

Sei $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(J) = x(I)$ gegeben, wobei beides glatte Jordan-Wege sind.

$$\overset{8.1.3}{\underset{8.1.4}{\Longrightarrow}} \exists h : I \to J, \in C^{(1)}, h' \neq 0 \text{ (streng monoton)} : \psi \circ h = x$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{\Longrightarrow} \dot{x}(t) = \psi'(h(t)) \cdot \dot{h}(t)$$

In $x^{(0)} = x(t_1) = \psi(t_2)$ ($\Rightarrow t_2 = h(t_1)$) erhält man also als Tangentialvektor:

- bzgl. x: $\dot{x}(t_1)$
- bzgl. ψ: $\psi'(t_2) = \frac{\dot{x}(t_1)}{\underbrace{\dot{h}(t_1)}_{\neq 0}}$

Die Tangentialvektoren unterscheiden sich also nur durch einen skalaren Faktor $\neq 0$. Sie erzeugen somit die gleiche Tangente.
Zum Tangentialvektor in $x^{(0)}$ gibt es eine $(n-1)$-dimensionale, orthogonale Hyperebene, die **Normalenebene**. Sie ist gegeben durch

$$\left(x - x^{(0)}\right) \cdot t = 0$$

wenn t Tangentialvektor in $x^{(0)}$ ist (siehe oben).
Nimmt man die *Bogenlänge als Parameter*, so erhält man: Sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, $s \mapsto \varphi(s)$ eine solche Parametrisierung, $[c, d] \ni t \mapsto s(t)$ Bogenlänge.
$\Rightarrow \psi(t) := \varphi(s(t))$ neue Parametrisierung (zu der s die Bogenlänge ist).
Tangentialvektoren:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(s(t)) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \cdot \left|\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} / \left|\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right| \ \textbf{Tangentialeinheitsvektor} \left(\text{wenn } \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \neq 0 \text{ z.B. glatter Weg}\right)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = 1 \ \forall s \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right) = 0 \ \forall s$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}s^2} \text{ ist ein } \textbf{Normalenvektor} - \text{die } \textbf{Hauptnormale}.$$

Für den Fall $\varphi''(s) \neq 0$ führt man folgendes ein:

- $|\varphi''(s)|$: Krümmung
- $\frac{1}{|\varphi''(s)|}$: Krümmungsradius (Radius eines Kreises mit der gleichen Krümmung)

Satz 8.2.8:

Jeder stückweise diffbarer Jordanweg ist rektifizierbar.
Dies gilt auch für stückweise stetig diffbare geschlossene Jordanwege.
Die Formel aus 8.2.5 ist somit anwendbar.

8.3 Kurvenintegrale

Definition 8.3.1: KURVENINTEGRAL

Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $I := [a,b]$, ein Jordanweg einer rektifizierbaren Kurve $\gamma := \varphi(I)$ mit Bogenlängenfunktion $s : I \to \mathbb{R}$.
Ist $f : \gamma \to \mathbb{R}$ (wenn vektoriell, dann komponentenweise) eine Funktion, sodass das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}s(t) =: \int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s$$

existiert, so nennt man f **integrierbar längs der Kurve** γ und $\int_\gamma f\,\mathrm{d}s$ das **Kurvenintegral** von f längs der Kurve γ (bzgl. der Bogenlänge).

Satz 8.3.2:

Sei $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan'sche rektifizierbare Kurve und $f : \gamma \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion.
Existiert das Integral längs γ

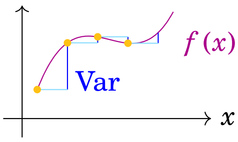
$$\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s$$

für mindestens eine Parametrisierung $\varphi : I \to \gamma$, so existiert dieses für alle Jordan'schen Parametrisierungen von γ und führt stets zum gleichen Ergebnis (daher *Kurven*integral).

Definition 8.3.3: VARIATION

Für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf $I := [a,b]$ und eine Zerlegung Z von I definieren wir die **Variation**

$$\mathrm{Var}(Z;f) := \sum_{i=0}^{r-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$



Ferner heißt

$$\mathrm{V}(f) := \mathrm{V}_a^b(f) := \sup\{\mathrm{Var}(Z;f) \mid Z \text{ Zerlegung von } I\}$$

die **Totalvariation** von f.

f heißt **von beschränkter Variation** (*bounded variation*), wenn $\mathrm{V}(f) < +\infty$.

$$\mathrm{BV}[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \mathrm{V}(f) < +\infty\}$$

Satz 8.3.4: Raum der Funktionen beschränkter Variation

$\mathrm{BV}[a,b]$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra.
Es gilt:

$$\mathrm{V}(\lambda f+g)\leq|\lambda|\mathrm{V}(f)+\mathrm{V}(g)\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ f,g\in\mathrm{BV}[a,b]$$
$$\mathrm{V}(fg)\leq\|f\|_\infty\mathrm{V}(g)+\|g\|_\infty\mathrm{V}(f)\ \forall f,g\in\mathrm{BV}[a,b]$$

Außerdem sind alle $f,g\in\mathrm{BV}[a,b]$ beschränkt.

Übung 8.3.Ü1:

$\mathrm{BV}[a,b]$ ist ein normierter Raum durch die Norm

$$\|f\|_{\mathrm{BV}[a,b]}:=\mathrm{V}_a^b(f)+|f(a)|$$

für $f\in\mathrm{BV}[a,b]$.

Satz 8.3.5:

Folgende Funktionen auf I sind stets von beschränkter Variation:

(1) monotone Funktionen.

(2) Lipschitzstetige Funktionen.

Beweis zu 8.3.5:

(1) Sei f monoton, zunächst monoton wachsend.

$$\mathrm{Var}(Z;f)=\sum_{i=0}^{r-1}|f(t_{i+1})-f(t_i)|,\ f(t_i)\leq f(t_{i+1})\ \forall i$$

$$\Rightarrow\mathrm{Var}(Z;f)=\sum_{i=0}^{r-1}(f(t_{i+1})-f(t_i))\overset{\text{Teleskopsumme}}{=}f(t_r)-f(t_0)=f(b)-f(a)$$

Monoton fallend: $\mathrm{Var}(Z;f)=-\sum_{i=0}^{r-1}(f(t_{i+1})-f(t_i))=f(a)-f(b)$ ✓

(2) Sei f Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante Λ.

$$\mathrm{Var}(Z;f)=\sum_{i=0}^{r-1}|f(t_{i+1})-f(t_i)|\leq\Lambda\sum_{i=0}^{r-1}|t_{i+1}-t_i|=\Lambda\sum_{i=0}^{r-1}(t_{i+1}-t_i)=\Lambda(b-a)$$
$$\Rightarrow\mathrm{V}(f)\leq\Lambda(b-a)$$

□

Satz 8.3.6: Darstellungssatz von Jordan

Eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Variation, wenn sie als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellbar ist.

Beweis zu 8.3.6:

„$\Leftarrow$" folgt aus Sätzen 8.3.4 und 8.3.5.

„$\Rightarrow$" Sei $f\in\mathrm{BV}[a,b]$. Dazu sei $g(t):=\mathrm{V}_a^t(t)\ \forall t\in I:=[a,b]$. g ist monoton wachsend ($s<t\Rightarrow$ Jede Zerlegung von $[a,s]$ ist Teil mindestens einer Zerlegung von $[a,t]$).
Es gilt ferner für $c,d\in I$ mit $c<d$, dass:

$$f(d)-f(c)\leq|f(d)-f(c)|\overset{Z:=\{c,d\}}{\leq}\mathrm{V}_c^d(f)=g(d)-g(c)$$

Setze $h:=g-f\Rightarrow h(c)-f(c)\leq g(d)-f(d)$, also $h\nearrow$. $\Rightarrow f=g-h$

□

Satz 8.3.7:

Sei $f \in \mathrm{C}[a,b]$ und $g \in \mathrm{BV}[a,b]$. Dann existiert

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}g$$

und es gilt

$$\left|\int_a^b f \,\mathrm{d}g\right| \leq \|f\|_\infty \cdot \mathrm{V}_a^b(g)$$

Da die Bogenlänge s monoton wachsend ist, ist sie nach 8.3.5 von beschränkter Variation. Somit existiert das Kurvenintegral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}s$ für alle stetigen Funktionen f.
Nach Satz 8.2.5 ist s außerdem stetig diffbar, wenn φ stetig diffbar ist. In diesem Fall gilt noch mehr.

Satz 8.3.8:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, $I := [a,b]$, $g \in \mathrm{C}^{(1)}(I)$.
Dann existiert $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}g$, und es gilt $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}g = \int_a^b f(t) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t$.

Korollar 8.3.9:

Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer, stückweise stetig diffbarer Jordan'scher Weg.
Dann gilt $\forall f : \varphi(I) \to \mathbb{R}$, für die $\int_{\varphi(I)} f \,\mathrm{d}s$ existiert, dass:

$$\int_{\varphi(I)} f \,\mathrm{d}s = \int_a^b f\left(\varphi(t)\right) \underbrace{\left|\varphi'(t)\right|}_{\underset{(8.2.5)}{=} s'(t)} \mathrm{d}t$$

Die Kurvenlänge ist also $L(\varphi) = \int_{\varphi(I)} 1 \,\mathrm{d}s$.

Beispiel 8.3.10:

Einheitskreis $\varphi(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$, $t\in[0,2\pi]$, mit Massendichte $\rho(x,y):=x^2+2y^2$.
Sei $K_1(0)$ die Kreislinie.
Gesamtmasse:

$$\begin{aligned}
M&=\int_{K_1(0)}\rho\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\rho(\cos t,\ \sin t)\cdot\left|\varphi'(t)\right|\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+2\sin^2 t\right)\cdot 1\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{2\pi}1+\sin^2 t\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}(3t-\sin t\cos t)\Big|_0^{2\pi}=3\pi
\end{aligned}$$

Schwerpunkt:

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{M}\left(\int_{K_1(0)}x\rho(x,y)\,\mathrm{d}s,\ \int_{K_1(0)}y\rho(x,y)\,\mathrm{d}s\right)\\
&=\frac{1}{M}\int_{K_1(0)}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\rho(x,y)\,\mathrm{d}s\\
&=\frac{1}{3\pi}\left(\int_0^{2\pi}\cos t\left(1+\sin^2 t\right)\cdot 1\,\mathrm{d}t,\ \int_0^{2\pi}\sin t\left(1+\sin^2 t\right)\cdot 1\right)\\
&\overset{\text{partielle Integration}}{=}\ \dots
\end{aligned}$$

8.4 Wegintegrale

Definition 8.4.1: WEGINTEGRAL

Sei $\varphi: I\to\mathbb{R}^n$, $I:=[a,b]$, ein rektifizierbarer, Jordan'scher Weg und $\gamma:=\varphi(I)$.

a) Für $f:\gamma\to\mathbb{R}$ sei

$$\int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}x_k:=\int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\mathrm{d}\varphi_k(t);\ k\in\underline{n}$$

das (skalare) **Wegintegral** von f bzgl. x_k längs φ, sofern das Integral existiert.

b) Für $F:\gamma\to\mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $F_1,\dots,F_n$ sei

$$\int_\varphi F(x)\cdot\mathrm{d}x:=\int_\varphi F_1\,\mathrm{d}x_1+F_2\,\mathrm{d}x_2+\dots+F_n\,\mathrm{d}x_n:=\sum_{k=1}^n\int_\varphi F_k(x)\,\mathrm{d}x_k$$

das **Wegintegral** oder **Arbeitsintegral** von F längs φ, sofern das Integral existiert.

Bei *geschlossenen* Wegen schreibt man auch $\oint$ statt $\int$.

Die bekannten Rechenregeln für R.-(S.)-Integrale übertragen sich auf das Wegintegral, insbesondere für stückweise stetig diffbare φ, da dann nach Satz 8.3.8 gilt:

$$\int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}x_k=\int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\varphi_k'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_\varphi F(x)\cdot\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n\int_a^b F_k\left(\varphi(t)\right)\varphi_k'(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b F\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Satz 8.4.2: Äquivalenz und Wegintegrale

Seien φ, ψ äquivalente, glatte Jordanwege zur Kurve $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\int_\varphi F(x)\,\mathrm{d}x = \int_\psi F(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall F : \gamma \to \mathbb{R}^n,$$

für die die Integrale existieren.

Beweis zu 8.4.2:
Nach 8.1.4 existiert eine streng monoton wachsende, stetig diffbare Funktion h mit $\psi \circ h = \varphi$ und $h' \neq 0$. Der Parameterbereich von φ sei I, der von ψ sei J. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\varphi F(x)\,\mathrm{d}x &= \int_I F\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_I F\left(\psi(h(t))\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\psi(h(t))\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_I F\left(\psi(h(t))\right) \cdot \psi'(h(t))h'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Subst. } \tau := h(t)}{=} \int_J F\left(\psi(\tau)\right) \cdot \psi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_\psi F(x) \cdot \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

Korollar 8.4.3: Wegintegral der gegensätzlichen Orientierung

Seien $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ glatte Jordanwege zur Kurve γ, wobei $\psi \sim \varphi^-$. Dann gilt:

$$\int_\varphi F(x) \cdot \mathrm{d}x = -\int_\psi F(x) \cdot \mathrm{d}x \quad \forall F : \gamma \to \mathbb{R}^n,$$

für die das Integral existiert.

Beweis zu 8.4.3:
Wir gehen analog zu oben vor (mit $I := [a,b]$, $J := [c,d]$), jedoch ist nun h streng monoton *fallend*. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_\varphi F(x) \cdot \mathrm{d}x &= \int_a^b F\left(\psi(h(t))\right) \cdot \psi'(h(t))h'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Subst. } \tau := h(t)}{=} \int_d^c F\left(\psi(\tau)\right) \cdot \psi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\int_c^d F\left(\psi(\tau)\right) \cdot \psi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= -\int_\psi F(x) \cdot \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

Satz 8.4.4:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet und $F : G \to \mathbb{R}^n$ stetig.
Für alle folgenden Wege gelte, dass sie rektifizierbar, Jordan'sch und stückweise stetig diffbar sind, sowie in G verlaufen ($\gamma \subseteq G$).
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) F ist ein **Gradientenfeld**, d.h. $\exists V \in C^{(1)}(G):\ F = \nabla V$

(2) Alle Wegintegrale von F sind wegunabhängig.
$\int_\varphi F(x) \cdot \mathrm{d}x$ hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.

(3) Integrale von F über geschlossene Wege verschwinden stets:
$\oint_\varphi F(x) \cdot \mathrm{d}x = 0$

Gelten diese Aussagen, gilt für $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $F = \nabla V$:

$$\int_\varphi F(x) \cdot \mathrm{d}x = V\left(\varphi(b)\right) - V\left(\varphi(a)\right)$$

Man schreibt dann auch

$$\int_\xi^\eta F(x) \cdot \mathrm{d}x := \int_\varphi F(x) \cdot \mathrm{d}x$$

wenn $\varphi(a) =: \xi$, $\varphi(b) =: \eta$.

Beweis zu 8.4.4:

(1)⇒(2): Sei $F = \nabla V$. Also gilt:

$$\int_\varphi F(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_a^b F\left(\varphi(t)\right) \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \underbrace{(\nabla V)}_{\substack{\text{äußere}\\ \text{Abl.}}}\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V\left(\varphi(t)\right)\mathrm{d}t \overset{\text{HDSI}}{=} V\left(\varphi(t)\right)\Big|_a^b = V\left(\varphi(b)\right) - V\left(\varphi(a)\right)$$

(2)⇒(3): Nach Korollar 8.4.3 gilt: $\int_\varphi F \cdot \mathrm{d}x = -\int_{\varphi^-} F \cdot \mathrm{d}x$.

Wegen (2):

$$\oint_\varphi F \cdot \mathrm{d}x = \oint_{\varphi^-} F \cdot \mathrm{d}x \Rightarrow \oint_\varphi F \cdot \mathrm{d}x = 0$$

(3)⇒(2) Seien $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ zwei Wege mit $\varphi(a) = \psi(c)$ und $\varphi(b) = \psi(d)$.
Wir hängen nun ψ^- an φ an:

$$\Phi(t) := \begin{cases} \varphi(a + t(b-a)) & 0 \le t \le 1 \\ \psi(d + (t-1)(c-d)) & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

Man schreibt häufiger auch $\varphi \oplus \psi^-$.
Offensichtlich ist

$$\oint_\Phi F \cdot \mathrm{d}x = \int_\Phi F \cdot \mathrm{d}x + \int_{\psi^-} F \cdot \mathrm{d}x$$

Wegen (3) gilt:

$$\oint_\Phi F \cdot \mathrm{d}x = 0$$

$$\Rightarrow \int_\varphi F \cdot \mathrm{d}x = -\int_{\psi^-} F \cdot \mathrm{d}x \overset{8.4.3}{=} \int_\psi F \cdot \mathrm{d}x$$

(2)⇒(1) Sei $\xi \in G$ fest. Wir definieren $V : G \to \mathbb{R}$ durch $V(x) := \int_\xi^x F(y)\,\mathrm{d}y,\ x \in G$.

Für hinreichend kleine $h \in \mathbb{R}^n$ gilt dann (mit $x^{(0)} \in G$):

$$V\left(x^{(0)}+h\right) = \int_\xi^{x^{(0)}+h} F(y)\cdot \mathrm{d}y = \underbrace{\int_\xi^{x^{(0)}} F(y)\cdot \mathrm{d}y}_{=V\left(x^{(0)}\right)\text{ per Def.}} + \int_{x^{(0)}}^{x^{(0)}+h} F(y)\cdot \mathrm{d}y$$

Ferner gilt (z.B. durch Parametrisierung der Strecke von $x^{(0)}$ nach $x^{(0)}+h$ mit $\varphi(t) = x^{(0)}+th,\ t \in [0,1]$):

$$\int_{x^{(0)}}^{x^{(0)}+h} F\left(x^{(0)}\right)\cdot \mathrm{d}y = \int_0^1 F\left(x^{(0)}\right)\cdot h\,\mathrm{d}t = F\left(x^{(0)}\right)\cdot h$$

Also erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|h|}\left|V\left(x^{(0)}+h\right) - V\left(x^{(0)}\right) - F\left(x^{(0)}\right)\cdot h\right| \\
&= \frac{1}{|h|}\left|\int_{x^{(0)}}^{x^{(0)}+h} F(y)\cdot \mathrm{d}y - \int_{x^{(0)}}^{x^{(0)}+h} F\left(x^{(0)}\right)\cdot \mathrm{d}y\right| \\
&= \frac{1}{|h|}\left|\int_{x^{(0)}}^{x^{(0)}+h} \left(F(y) - F\left(x^{(0)}\right)\right)\cdot \mathrm{d}y\right| \\
&= \frac{1}{|h|}\left|\int_0^1 \left(F\left(x^{(0)}+th\right) - F\left(x^{(0)}\right)\right)\cdot h\,\mathrm{d}t\right| \\
&\underset{\text{CSB}}{\overset{\Delta\text{-Ugl. Int.}}{\leq}} \frac{1}{|h|}\int_0^1 \left|F\left(x^{(0)}+th\right)\right|\cdot|h|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{|h|}\int_0^1 \max_{x\in\mathcal{K}_{|h|}\left(x^{(0)}\right)} \left|F(x) - F\left(x^{(0)}\right)\right|\cdot|h|\,\mathrm{d}t \\
&= \max_{x\in\mathcal{K}_{|h|}\left(x^{(0)}\right)} \left|F(x) - F\left(x^{(0)}\right)\right| \xrightarrow{h\to 0} 0, \text{ da } F \text{ stetig.}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow V$ in $x^{(0)}$ diffbar und $\nabla V\left(x^{(0)}\right) = F\left(x^{(0)}\right)$

□

Satz 8.4.5: Integrabilitätsbedingungen

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F \in C^{(1)}(G,\mathbb{R}^n)$.
Ist F ein Gradientenfeld in G, so gelten die Integrabilitätsbedingungen:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \quad \forall i,k \in \underline{n}$$

Beweis zu 8.4.5:

Sei $F = \nabla V$, d.h. $F_i = \frac{\partial}{\partial x_i} V$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}V \underset{\uparrow}{=} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}V = \frac{\partial}{\partial x_i}F_k$$

nach dem Satz von Schwarz, da $F \in C^{(1)}(G,\mathbb{R}^n) \Rightarrow V \in C^{(2)}(G)$. □

Bemerkung 8.4.6:

a) Es reicht offensichtlich, die Integrabilitätsbedingung für $i < k$ zu prüfen.
b) Im $\mathbb{R}^3$ ist die Integrabilitätsbedinung äquivalent zu $\operatorname{rot} F = 0$.
c) Die Umkehrung gilt nicht. Die Integrabilitätsbedingung ist *notwendig*, aber nicht *hinreichend* für ein Gradientenfeld.

Gegenbeispiel zu c):

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

f erfüllt die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, ist aber kein Gradientenfeld.
Siehe auch 7.3.Ü1.

Ein Satz als Einschub:

Satz 8.4.7:

Seien I, J Intervalle in $\mathbb{R}$, I kompakt, J offen, $f: I \times J \to \mathbb{R}$ stetig partiell diffbar.
Definiere $F: J \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$F(y) := \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x \ \text{ für } y \in J$$

$\Rightarrow F$ stetig diffbar und $F'(y) = \displaystyle\int_I \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \ \forall y \in J.$
d.h. Differentiation und Integration nach verschiedenen Variablen dürfen vertauscht werden.

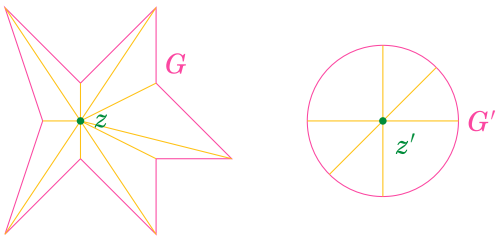
Für die Umkehrung von 8.4.5 braucht man eine Zusatzbedingung an den Definitionsbereich G:
Eine mögliche Bedingung derart ist, dass G *sternförmig* ist.

Definition 8.4.8: Sternförmiges Gebiet

Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig** (*star-shaped*), wenn es einen Punkt $z \in G$ gibt, sodass

$$\overline{zx} \subseteq G \ \forall x \in G$$

Man sagt dann auch „G ist bzgl. z sternförmig“ oder „z ist **Sternpunkt** von G“.



Satz 8.4.9:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und $F \in C^{(1)}(G, \mathbb{R}^n)$ eine Funktion, die die Integrabilitätsbedingung erfüllt.
Dann ist F ein Gradientenfeld (*hinreichende* Bedingung).

Beweis zu 8.4.9:

Wegen $\frac{\partial}{\partial x_k}(F_i(x-z)) = \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \cdot 1$ ändert sich die Integrabilitätsbedingung nicht, wenn das Koordinatensystem verschoben wird.
Sei also o.B.d.A. $z = 0$ ein Sternpunkt. Sei nun $x \in G$ fest, aber beliebig, und $\varphi_x(t) := tx,\ t \in [0,1]$ eine Parametrisierung von $\overline{0x}$. (Diese Strecke existiert wegen der Sternförmigkeit.)
Wir setzen somit $V(x) := \displaystyle\int_{\varphi_x} F(y) \cdot \mathrm{d}y$ für jedes $x \in G$.
Es gilt:

$$V(x) = \int_0^1 F(tx) \cdot x\,\mathrm{d}t$$

Ferner gilt (wollen wir später benutzen):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k}(x \cdot F(tx)) &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^n x_j F_j(tx)\right) = \sum_{j=1}^n \left(\delta_{jk} F_j(tx) + x_j \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(tx)\, t\right) \\
&\overset{\text{Int.bed.}}{=} F_k(tx) + \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(tx)\, t \\
&= F_k(tx) + t(\nabla F_k) \cdot x \\
&\underset{\text{rückwärts}}{\overset{\text{Kettenregel}}{=}} \frac{\partial}{\partial t}(t F_k(tx))
\end{aligned}$$

Nach 8.4.7 gilt somit:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} V(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \int_0^1 F(tx) \cdot x \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_k}(F(tx) \cdot x)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(t F_k(tx))\,\mathrm{d}t \overset{\text{HSDI}}{=} t F_k(tx)\Big|_{t=0}^{t=1} = F_k(x)$$

$\Rightarrow F = \nabla V$ □

Beispiel 8.4.10:

Siehe Gegenbeispiel von 8.4.6.c).

$f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y \\ x\end{pmatrix}$ kein Gradientenfeld, es erfüllt die Integrabilitätsbedingung, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht sternförmig.

Wir berechnen nun das Arbeitsintegral längs eines geschlossenen Weges $\varphi(t) := \begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$:

$$\oint_\varphi f \cdot \mathrm{d}(x, y) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 + \cos^2}} \begin{pmatrix}-\sin t \\ \cos t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-\sin t \\ \cos t\end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}t = 2\pi \neq 0$$

Aber: Beispielsweise $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ ist sternförmig. Damit ist $f|_H$ ein Gradientenfeld.
Gemäß Beweis von 8.4.6 erhalten wir wie folgt eine Stammfunktion:

$$V(x, y) = \int_{(0,1)}^{(x,y)} f(\overline{x}, \overline{y})\,\mathrm{d}(\overline{x}, \overline{y})$$

Wegen der Wegunabhängigkeit: verwende Polygonzug $\overline{(1,0)(x,0)(x,y)}$.

1. TEIL: $\varphi(t) = \begin{pmatrix}1 + t(x-1) \\ 0\end{pmatrix}$, $t \in [0, 1]$

$$\Rightarrow \int_\varphi f \cdot \mathrm{d}(\overline{x}, \overline{y}) = \int_0^1 \frac{1}{\dots} \cdot \begin{pmatrix}0 \\ \vdots\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x-1 \\ 0\end{pmatrix} \mathrm{d}t = 0$$

2. TEIL: $\psi(t) := \begin{pmatrix}x \\ ty\end{pmatrix}$, $t \in [0, 1]$

$$\Rightarrow \int_\psi f \cdot \mathrm{d}(\overline{x}, \overline{y}) = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + (ty)^2} \begin{pmatrix}-ty \\ x\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 \\ y\end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{xy}{x^2 + t^2 y^2}\,\mathrm{d}t = \dots = \arctan\frac{x}{y}$$

$\Rightarrow V(x, y) = \arctan\frac{y}{x}$ wenn $(x, y) \in H$. V ist *nicht* stetig fortsetzbar auf $\overline{H}$.

Ende des 2. Semesters.