

Analysis II

Alexander Köster, *Student der Universität Siegen*

7. August 2018

Eine Sammlung des zusammengefassten Vorlesungs- und Übungsstoffes einiger Themen der Analysis.

Eine Sammlung einiger Inhalte der Veranstaltungen der Analysis 2 im Sommersemester 2018 der Universität Siegen.

Diese Sammlung wurde unabhängig von der Universität erstellt.

Inhaltsverzeichnis

5	Eindimensionale Differentialrechnung	2
5.1	Ableitungen	2
5.2	Zentrale Sätze	4
5.3	Folgen und Reihen von Funktionen II	11
6	Das Riemann-Integral in \mathbb{R}^1	15
6.1	Definition & einfache Eigenschaften	15
6.2	Zentrale Sätze	23
6.3	Uneigentliche Integrale	28
6.4	Folgen und Reihen von Funktionen III	33
6.5	Banachräume und Differentialgleichungen	35
7	Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen	38
7.1	Partielle und totale Ableitungen	38
7.2	Höhere Ableitungen	45
7.3	Zentrale Sätze	48
7.4	Geometrisches	57
7.5	Umkehrsatz, implizite Funktionen und Lagrange-Multiplikatoren	58
8	Integration längs Kurven und Wegen	65
8.1	Kurven und Wege	65
8.2	Weglänge	67
8.3	Kurvenintegrale	73
8.4	Wegintegrale	78
	Index	85
	Symbol- und Abkürzungsverzeichnis	87

5 Eindimensionale Differentialrechnung

5.1 Ableitungen

Aus dem 1. Semester, **Analysis I**:

Definition 5.1.1: DIFFERENZIERBARKEIT

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 innerer Punkt von D .

f heißt in x_0 **differenzierbar** („diffbar“), falls $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existiert.

Dann heißt $f'(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ **Ableitung** oder Differentialquotient von f in x_0 .

Rechts-/linksseitig differenzierbar mit $\lim_{h \rightarrow 0^+}$ bzw. $\lim_{h \rightarrow 0^-}$.

Bezeichnung: $f'_+(x_0) := \frac{d^+f}{dx}(x_0)$ bzw. $f'_-(x_0) := \frac{d^-f}{dx}(x_0)$

Ist f diffbar $\forall x \in D$ (und D offen), so heißt f differenzierbar.

Sind Ableitungen diffbar (f „ n -mal diffbar“), so ist $f^{(n)} := \frac{d^n f}{dx^n} := (f^{(n-1)})'$ die **n -te Ableitung** von f .

Bemerkung 5.1.2: DIFFERENZIERBAR AUF ABGESCHLOSSENEN INTERVALLEN

Manchmal wird eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar genannt, wenn $f|_{]a, b[}$ diffbar ist und f in a rechtsseitig und in b linksseitig diffbar ist.

Satz 5.1.3: DIFFERENZIERBARKEIT UND STETIGKEIT

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in D$. Dann ist f stetig in x_0 . Die Umkehrung gilt i.A. *nicht*.

Analog: rechts-/linksseitig diffbar \Rightarrow rechts-/linksseitig stetig.

Satz 5.1.4: ABLEITUNGSREGELN

Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ (rechts-/linksseitig) diffbar in $x_0 \in D$. Dann gilt:

- Linearität:** $f + g$, $f - g$, λf mit $\lambda \in \mathbb{R}$ sind (rechts-/linksseitig) diffbar in x_0 , wobei $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$ und $(\lambda f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$.
- Produktregel:** $f \cdot g$ ist (rechts-/linksseitig) diffbar in x_0 , wobei $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
- Quotientenregel:** Ist $\forall x \in D : g(x) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in x_0 (rechts-/linksseitig) diffbar und $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Satz 5.1.5: KETTENREGEL

Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 diffbar und $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ diffbar.

Dann ist $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 diffbar und $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Lemma 5.1.6: ABLEITUNG DER UMKEHRFUNKTION

Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton $\left| \begin{array}{l} \text{fallend} \\ \text{steigend} \end{array} \right|$ und in $x_0 \in]a, b[$ diffbar, wobei $f'(x_0) \neq 0$.

Dann ist f^{-1} in $f(x_0)$ diffbar und $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Ende des 1. Semesters. Ab hier **Analysis II**.

Beispiel 5.1.7: DIFFERENZIERBARKEIT VON POLYNOMEN

- a) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n \Rightarrow f'_n(x) = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$
 \Rightarrow Alle Monome und damit alle Polynome sind diffbar.
- b) $f(x) := e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Beweis:

Seien $x, h \in \mathbb{R}$. Betrachte:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}$$

$$\begin{aligned} \frac{e^h - 1}{h} &= \frac{1}{h} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} - 1 \right) = \frac{1}{h} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} - 1 \right) = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{(n+1)!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{(n+1)!} =: g(h) \end{aligned}$$

GESUCHT: $\lim_{h \rightarrow 0} g(h)$

Sei $h \in [-1, 1]$. Dann: $\left| \frac{h^n}{(n+1)!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$ konvergiert.

Weierstraß $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{(n+1)!}$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf $[-1, 1]$. $\Rightarrow g$ stetig auf $[-1, 1]$.

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} g(h) = g\left(\lim_{h \rightarrow 0} h\right) = g(0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{(n+1)!} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (e^x \cdot g(h)) = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(h) = e^x \cdot 1 = e^x$$

□

e^x ist die einzige Funktion mit der Eigenschaft, ihre eigene Ableitung zu sein (außer Vielfache).

- c) $f(x) := \arcsin x \xrightarrow{x \in (-1,1)} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Beweis:

Aus Definition folgt: $\sin(\arcsin(x)) = x \Rightarrow 1 = \underbrace{\sin'(\arcsin(x))}_{\text{gesucht}} \cdot \arcsin'(x)$

$$\sin'(\arcsin(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - (\sin^2(\arcsin(x)))} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\xrightarrow{x \in (-1,1)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin'(x)$$

□

Für $x \in \{-1, 1\}$ ist \arcsin nicht diffbar.

- d) $f(x) := \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ für $x \neq \frac{2n+1}{2}\pi, n \in \mathbb{Z}$.
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Liste wichtiger Ableitungen:

$f(x)$	x^n	e^x	$\log x = \ln x$	$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$f'(x)$	$\underbrace{nx^{n-1}}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$

für $n \in \mathbb{R}$ (Definitionsbereich beachten!)

Definition 5.1.8: STETIGE DIFFERENZIERBARKEIT

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar und $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt f **stetig differenzierbar**.
 Der Raum aller n -mal stetig diffbaren Funktionen auf D wird mit $C^{(n)}(D)$ bezeichnet.
 Es gilt: $C(D) = C^{(0)}(D)$. Es ist $C^{(0)}(D) \supset C^{(1)}(D) \supset C^{(2)}(D) \supset \dots$ (siehe dazu später).

5.2 Zentrale Sätze**Satz 5.2.1: SATZ VON ROLLE**

Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine auf $]a, b[$ diffbare und auf $[a, b]$ stetige Funktion, und es gelte $f(a) = f(b)$.
 Dann gilt: $\exists \xi \in]a, b[: f'(\xi) = 0$

Beweis zu 5.2.1:

Ist f konstant, so ist die Aussage klar ($f' = 0$).

Es existiere also ein $x_1 \in]a, b[$, sodass $f(x_1) \neq f(a)$. O.B.d.A. sei $f(x_1) > f(a)$ (sonst betrachte hier $-f$).
 f ist stetig auf Kompaktum $\Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : f(\xi) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} f(\xi) &\geq f(x_1) > f(a) = f(b) \\ \Rightarrow \xi &\neq a, \xi \neq b \Rightarrow \xi \in]a, b[\end{aligned}$$

Was ist mit der Ableitung?

$$\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} = \begin{cases} \leq 0 & h > 0 \\ \geq 0 & h < 0 \end{cases}$$

Da nach Voraussetzung f diffbar ist und damit der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h}$ existiert, muss gelten:

$$\Rightarrow f'(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} = 0$$

□

Satz 5.2.2: MITTELWERTSATZ DER DIFFERENTIALRECHNUNG („MWS DIFF“)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ diffbar.

(1) „1. MWS DIFF“

$$\Rightarrow \exists \xi \in]a, b[: \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\text{Sekantensteigung}} = f'(\xi)$$

Beispiel: Eine durchschnittliche Geschwindigkeitsmessung impliziert, dass ein Auto diese Geschwindigkeit irgendwo im Messintervall mal gefahren sein muss.

(2) „2. MWS DIFF“

Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ diffbar, $g'(x) \neq 0 \forall x \in]a, b[$.

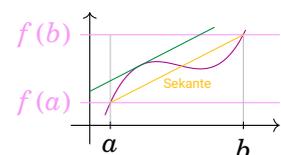
$$\Rightarrow \exists \xi \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Beweis zu 5.2.2:

$$(1) \quad h(x) := f(x) - \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ \text{Monom}}} \cdot x \quad \rightarrow \text{Komposition stetiger Funktionen}$$

h ist stetig auf $[a, b]$, diffbar auf $]a, b[$.

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a = \frac{f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a}{b - a} = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a}$$



$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{f(b)b - f(b)a - f(b)b + f(a)b}{b-a} = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} = h(a)$$

$$\stackrel{\text{Rolle}}{\implies} \exists \xi \in]a, b[: h'(\xi) = 0$$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow 0 = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad (\text{genau der MWS DIFF})$$

□

(2) Nach (1) wissen wir: $\exists \tilde{\xi} \in]a, b[: 0 \neq g'(\tilde{\xi}) = \frac{g(b) - g(a)}{b-a}$

$\Rightarrow g(a) \neq g(b) \Rightarrow$ linker Nenner im 2. MWS $\neq 0$

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$$

Ab hier analog (1).

□

Korollar 5.2.3:

Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ und diffbar auf $]a, b[$ und stetig auf $[a, b]$.

- (i) $f'(x) = 0 \forall x \in]a, b[\Rightarrow f$ konstant
- (ii) $f'(x) \geq 0 \forall x \in]a, b[\Rightarrow f$ monoton steigend
- (iii) $f'(x) > 0 \forall x \in]a, b[\Rightarrow f$ streng monoton steigend
- (iv) $f'(x) \leq 0 \forall x \in]a, b[\Rightarrow f$ monoton fallend
- (v) $f'(x) < 0 \forall x \in]a, b[\Rightarrow f$ streng monoton fallend
- (vi) f' beschränkt $\Rightarrow f$ Lipschitzsch

Beweis zu 5.2.3:

ii) Seien $x, y \in [a, b]$ beliebig, $x \neq y$, o.B.d.A. $x < y$. $\Rightarrow f|_{[a, b]}$ stetig auf $[x, y]$ und diffbar auf $]x, y[$

$$\Rightarrow \exists \xi \in]x, y[\subset]a, b[: 0 \leq f'(\xi) \stackrel{\text{MWS}}{=} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$f(y) - f(x) > 0 \Rightarrow f \text{ monoton steigend.}$$

□

vi) Seien $x, y \in [a, b]$ beliebig, $x \neq y$, o.B.d.A. $x < y$. f' beschränkt.

$$\exists \gamma(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathbb{R} : \forall z \in]a, b[: |f'(z)| < \gamma$$

$$\stackrel{\text{MWS}}{\implies} \exists \xi \in]x, y[: \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi)$$

$$\Rightarrow |f(y) - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |y - x| \leq \gamma |y - x| \Rightarrow \gamma \text{ ist Lipschitzkonstante von } f.$$

□

Definition 5.2.4: UMGEBUNG

- (i) $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Umgebung** von
 - a) $a \in \mathbb{R}$, falls eine ε -Umgebung $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ existiert, sodass $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq U$
 - b) $+\infty$, falls ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $]a, +\infty[\subseteq U$
 - c) $-\infty$, falls ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $] -\infty, a[\subseteq U$
- (ii) $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt **linksseitige** bzw. **rechtsseitige Umgebung** von $a \in \mathbb{R}$, falls

$$\exists \varepsilon > 0 :]a - \varepsilon, a] \subseteq U \text{ bzw. } [a, a + \varepsilon[\subseteq U$$

- (iii) $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt **punktierte Umgebung** von a , falls eine ε -Umgebung $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ existiert, sodass $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \subseteq U$. Analog sind punktierte links-/rechtsseitige Umgebungen von a definiert.

Betrachte folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}}, \quad a > 0, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Zähler und Nenner $\rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$$

Zähler $\rightarrow -\infty$, Nenner $\rightarrow +\infty$

Das ist ein Problem. Lösung (in den meisten Fällen):

Satz 5.2.5: L'HÔPITAL'SCHE REGEL

VORAUSSETZUNG: Seien f, g auf einer (punktierten) (links-/rechtsseitigen) Umgebung U von $a \in \overline{\mathbb{R}}$ definiert und differenzierbar $g'(x) \neq 0$ in U . Sei ferner für $x \rightarrow a^{(+/-)}$:

I) $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$

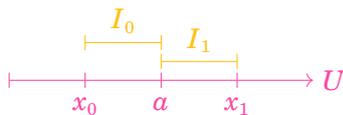
II) $f(x) \rightarrow \pm\infty, g(x) \rightarrow \pm\infty$ (alle 4 Kombinationen)

BEHAUPTUNG: Wenn $\lim_{x \rightarrow a^{(+/-)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$ existiert, dann existiert $\lim_{x \rightarrow a^{(+/-)}} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim_{x \rightarrow a^{(+/-)}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Beweis zu 5.2.5:

(exemplarisch für $x \rightarrow a \in \mathbb{R}$ und Fall I))

Sei (x_n) beliebige Folge in U mit $x_n \rightarrow a, x_n \neq a \forall n$. Setze f und g auf a stetig fort durch $f(a) := 0 =: g(a)$ (darf man wegen Voraussetzung von I)). Sei $I_n := [\min\{x_n, a\}, \max\{x_n, a\}]$.



$\Rightarrow f, g$ sind stetig auf I_n , diffbar auf $\overset{\circ}{I}_n$ (Inneres), $g'(x) \neq 0$ auf $\overset{\circ}{I}_n$.

$$\stackrel{2. \text{ MWS DIFF}}{\Rightarrow} \exists \xi_n \in \overset{\circ}{I}_n : \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \frac{\overbrace{f(a) - f(x_n)}^{=0}}{\underbrace{g(a) - g(x_n)}_{=0}}$$

Da $\xi_n \in \overset{\circ}{I}_n$, ist $0 \leq |\xi_n - a| \leq |x_n - a| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \stackrel{\text{Sandwich}}{\Rightarrow} \xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

Da $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: A$ existiert, ist $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$.

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = A$$

□

Also gilt:

$$F(x) - F(x_0) = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} (G(x) - G(x_0))$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n \cdot \frac{-(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-\xi)^n \cdot (-1)}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

□

Definition 5.2.8: EXTREMA

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. f hat in $x_0 \in]a, b[$ ein **lokales Minimum** | **Maximum** |, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $\left| \begin{matrix} f(x_0) \leq f(x) \\ f(x_0) \geq f(x) \end{matrix} \right| \forall x$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$ gilt.

Oberbegriff für Max. und Min. ist **Extremum**. x_0 heißt **extremal** oder **lokaler Minimierer** | **Maximierer** |.

Satz 5.2.9: EXTREMA DURCH ABLEITUNGEN

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar.

- (i) Wenn $x_0 \in]a, b[$ extremal, so ist $f'(x_0) = 0$.
- (ii) Wenn $f \in C^{(2)}[a, b]$ und $f'(x_0) = 0$, so gilt:
 - a) Wenn $f''(x_0) > 0$, so ist f in x_0 lokal minimal.
 - b) Wenn $f''(x_0) < 0$, so ist f in x_0 lokal maximal.
- (iii) Wenn $f \in C^{(3)}[a, b]$ und $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, aber $f'''(x_0) \neq 0$, so hat f bei x_0 kein Extremum. x_0 heißt dann **Sattelpunkt**.

Beweis zu 5.2.9:

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar und $x_0 \in]a, b[$ extremal.

(i) Seien $(y_n), (z_n)$ Folgen mit $y_n < x_0 < z_n \forall n$ und $y_n \rightarrow x_0, z_n \rightarrow x_0$.

VARIANTE 1: Minimum, VARIANTE 2: Maximum

$$f'(x_0) = \lim_{\text{Def. } h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \left\{ \begin{matrix} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} \begin{matrix} \geq 0 \leq 0 \\ < 0 \end{matrix} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \leq 0 \\ \geq 0 \end{matrix}$$

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(x_0)}{z_n - x_0} \begin{matrix} \geq 0 \leq 0 \\ > 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \leq 0 \\ \geq 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$ (vgl. Satz von Rolle)

□

(ii) Umgekehrt gilt (i) nicht immer: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = 0$, aber kein Extremum in 0.

Also: Zusätzliche Bedingungen!

Sei f 2-mal diffbar, $f'(x_0) = 0$.

Taylor ($n+1=2 \Rightarrow n=1$): Sei $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$.

$$\exists \xi_x \in]\min\{x_0, x\}, \max\{x_0, x}[: f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0)^1}_{=0} + \frac{f''(\xi_x)}{2!} (x-x_0)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \underbrace{f''(\xi_x)}_{>0} \frac{(x-x_0)^2}{2}$$

Also Größenvergleich von $f(x)$ und $f(x_0)$ möglich, wenn $f''(\xi_x)$ bekannt. Für lokale Extrema reicht $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, dann ist auch $\xi_x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ (muss ja zwischen x_0 und x liegen).

Gilt $\left| \begin{array}{l} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array} \right| \stackrel{!}{\Rightarrow} \left| \begin{array}{l} f''(\xi_x) > 0 \\ f''(\xi_x) < 0 \end{array} \right| ?$

Zusatzvoraussetzung: $f \in C^{(2)}[a, b]$, d.h. f'' stetig.

$f''(x_0) \neq 0$ und f'' stetig $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : f''(x) \neq 0 \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$, genauer: $\left| \begin{array}{l} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array} \right|, f'' \text{ stetig} \stackrel{\text{ZWS}}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0 :$

$\left| \begin{array}{l} f''(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \end{array} \right| \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$

Somit: Wenn $\left| \begin{array}{l} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array} \right|$, dann $\exists \varepsilon > 0$, sodass $f(x) = f(x_0) + \underbrace{f''(\xi)}_{\substack{>0 \\ <0}} \frac{(x-x_0)^2}{2} \left| \begin{array}{l} > f(x_0) \\ < f(x_0) \end{array} \right| \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$. □

(iii) Taylor, wobei o.B.d.A. $f'''(x_0) > 0$ (sonst Vorzeichen umdrehen). Sei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sodass $f'''(x) > 0 \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$.

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}_{>0} + \underbrace{\frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x-x_0)^3}_{\substack{>0 \text{ für } x > x_0 \\ <0 \text{ für } x < x_0}} \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$$

\Rightarrow kein lokales Extremum. □

Bemerkung 5.2.10:

Allgemein gilt, wenn $f \in C^{(n+1)}[a, b]$, $f'(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$, $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$:

a) Ist $n + 1$ gerade, so gilt:

(a.1) $f^{(n+1)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ lokales Maximum bei x_0

(a.2) $f^{(n+1)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ lokales Minimum bei x_0

b) Ist $n + 1$ ungerade, so liegt kein lokales Extremum bei x_0 vor (x_0 Sattelpunkt).

Beweis zu 5.2.10:

a) Sei $n + 1$ gerade, d.h. $\exists m \in \mathbb{N} : n + 1 = 2m$.

Taylor: Für $x \in [a, b] \exists \xi \in]\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\}[:$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \\ &= f(x_0) + \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}_{=0} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \\ &= f(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (*) \end{aligned}$$

Aus $f^{(n+1)}$ stetig und $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ folgt:

$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0) : f^{(n+1)}(x) \neq 0$, genauer:

Wenn $\left| \begin{array}{l} f^{(n+1)}(x) > 0 \\ f^{(n+1)}(x) < 0 \end{array} \right|$, dann $\exists \varepsilon > 0$, sodass mit $\xi \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0) :$

$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}_{\substack{>0 \\ <0}} (x-x_0)^{n+1}$ immer ≥ 0 , da $n+1$ gerade.

und somit $\left| \begin{array}{l} f(x) \geq f(x_0) \\ f(x) \leq f(x_0) \end{array} \right| \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$. Damit ist x_0 ein lokales $\left| \begin{array}{l} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{array} \right|$.

b) Sei $n + 1$ ungerade. Sei dabei o.B.d.A. $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ (sonst Vorzeichen wechseln), und ähnlich wie oben sei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sodass $f^{(n+1)}(x) > 0 \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ ist.

Taylor: Für $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0) \exists \xi \in]\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\}[\subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

$$= \underbrace{f(x_0)}_{>0} + \sum_{k=1}^n \overbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}{=0} (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}_{>0} \underbrace{(x - x_0)^{n+1}}_{\substack{>0 \text{ für } x > x_0 \\ <0 \text{ für } x < x_0}}$$

$$\Rightarrow f(x) \begin{cases} > f(x_0) & x > x_0 \\ < f(x_0) & x < x_0 \end{cases}$$

\Rightarrow Es liegt bei x_0 kein Extremum vor. Wegen dem Vorzeichenwechsel (echt kleiner \rightarrow echt größer) ist x_0 ein Sattelpunkt. □

Beispiel 5.2.11:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2, f'(x) = 2x, f''(x) = 2 \forall x \in \mathbb{R}$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ **notwendig** für Extremum, d.h. $x_0 = 0$ ist ein Kandidat für Extremum.
Hinreichend: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$, hier: $f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum bei 0.

b) ...

Satz 5.2.12:

e ist irrational.

Beweis zu 5.2.12:

Annahme: $\exists m, n \in \mathbb{N} : e = \frac{m}{n}$
 Sei $p \in \mathbb{N}$, sodass $e < p$ (Archimedes). o.B.d.A. $n > p$ (bei Bedarf, Bruch erweitern).
 Klar: $p > 2$ ($e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots > 2$).
 Taylor ($f = \exp, x = 1, x_0 = 0$):

$$\exists \xi \in]0, 1[: \frac{m}{n} = \exp(1) = \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k + \frac{\exp^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (1-0)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{e^0}{k!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} \quad || \cdot n!$$

$$\Rightarrow \underbrace{m \cdot (n-1)!}_{\in \mathbb{Z}} = \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{Z}} + \frac{e^\xi}{n+1} \Rightarrow \frac{e^\xi}{n+1} \in \mathbb{Z} \text{ (genauer: in } \mathbb{N}, \text{ da } e^x > 0$$

Es gilt: $0 < \xi < 1 \Rightarrow 1 = e^0 < e^\xi < e^1 = e$ (Monotonie von \exp)
 Aus o.B.d.A.-Bedingung: $n + 1 > p + 1 \Rightarrow 0 < \frac{e^\xi}{n+1} < \frac{e}{p+1} < 1$
 \nexists dazu, dass zwischen 0 und 1 keine natürliche Zahl liegt. □

5.3 Folgen und Reihen von Funktionen II

Bemerkung 5.3.1: DIFFERENTIATION IN \mathbb{C}

$f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, in $z_0 \in G$ diffbar, falls

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \text{ existiert } (= f'(z_0))$$

(d.h. in komplexer Metrik: $d(z, w) = |z - w| = \sqrt{(z - w)(\bar{z} - \bar{w})}$)

Klar ist: f in $x_0 \in \mathbb{R}$ komplex diffbar $\Rightarrow f$ in x_0 (reell) diffbar ($h \rightarrow 0$, $h \in \mathbb{C}$ beinhaltet $h \rightarrow 0$, $h \in \mathbb{R}$)

Beispiel:

a) $f(z) = z^2$, $\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \frac{z^2 + 2hz + h^2 - z^2}{h} = 2z + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2z \Rightarrow f$ komplex diffbar, $f'(z) = 2z$

b) $f(z) = |z|$. Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z_0 = r e^{i\varphi}$, $r > 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi[$

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = |z_0 + h| - |z_0|$$

Spezielle Annäherung für $h \rightarrow 0$: $z_0 + h_n := r e^{i(\varphi + \frac{1}{n})}$

Andere Annäherung: $z_0 + \tilde{h}_n := (1 - \frac{1}{n}) e^{i\varphi}$ d.h. $\tilde{h}_n := -\frac{1}{n} r e^{i\varphi}$

$\Rightarrow f$ in **keinem** $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex diffbar. Aber: f in $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ reell diffbar, nur in $z_0 = 0$ nicht.

Also: reell diffbar $\not\Rightarrow$ komplex diffbar.

Satz 5.3.2: SATZ ÜBER GLIEDWEISE DIFFERENTIATION

Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$.

Damit ist P im Inneren des Konvergenzkreises, d.h. $\forall z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r$, (komplex) diffbar, und es gilt:

$$P'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k ((z - z_0)^k)' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (z - z_0)^{k-1}$$

P' hat ebenfalls Konvergenzradius r .

Somit ist P im Inneren des Konvergenzkreises beliebig oft diffbar.

Beweis zu 5.3.2:**(Skizze)**

Sei (h_n) beliebige Folge mit $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

z.z. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(z+h_n) - P(z)}{h_n}$ existiert $\forall z \in \mathcal{K}_r(z)$ und ist stets $= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$.

d.h. z.z. $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : \left| \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} - \frac{P(z+h_n) - P(z)}{h_n} \right| < \varepsilon$.

$$= \frac{1}{h_n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k ((z+h_n - z_0)^k - (z - z_0)^k) \quad (\text{Summand für } k=0 \text{ fällt weg.})$$

Wir betrachten hierzu:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} - \frac{P(z+h_n) - P(z)}{h_n} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(-\frac{(z+h_n - z_0)^k}{h_n} + \frac{(z - z_0)^k}{h_n} + k(z - z_0)^{k-1} \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| a_k \left(-\frac{(z+h_n - z_0)^k}{h_n} + \frac{(z - z_0)^k}{h_n} + k(z - z_0)^{k-1} \right) \right| \end{aligned}$$

Nach Cauchy-Hadamard wissen wir etwas über a_k .

Zu $\varepsilon > 0$ finde ein $k_0(\varepsilon)$, sodass $\forall n$:

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left| a_k \left(-\frac{(z+h_n-z_0)^k}{h_n} + \frac{((z-z_0)^k)}{h_n} + k(z-z_0)^{k-1} \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

(u.a. durch Abschätzung mit geometrischer Reihe)

Finde dann $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq n_0$:

$$\sum_{k=0}^{k_0} \left| a_k \left(-\frac{(z+h_n-z_0)^k}{h_n} + \frac{((z-z_0)^k)}{h_n} + k(z-z_0)^{k-1} \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

(ebdlich viele Summanden: GWS, Brüche $\rightarrow 0$ wegen Diffbarkeit)

\rightarrow Induktion. □

Beispiel 5.3.3: GLIEDWEISE DIFFERENTIATION

$$P(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \text{ Konvergenzradius } r = 1.$$

$$P'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \text{ (geometrische Reihe)}$$

Beachte: Konvergenz/Divergenz am Rand des Konvergenzkreises

z.B. P : Divergent bei $z = 1$ (harm. Reihe), Konvergent bei $z = -1$ (Leibniz); P' divergent bei $z = \pm 1$
 d.h.: Randeigenschaften übertragen sich *nicht*.

Satz 5.3.4: LOKALE ENTWICKELBARKEIT IN EINE POTENZREIHE

Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, ($a < b$), beliebig oft diffbar und $x_0 \in]a, b[$.

f heißt **lokal bei $x_0 \in \mathbb{R}$ in eine Potenzreihe entwickelbar**, wenn f eingeschränkt auf eine ε -Umgebung von x in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Es gilt:

(i) Falls $K, \delta \in \mathbb{R}^+$ existieren, sodass $|f^{(n)}| \leq K \forall n \in \mathbb{N}_0, x \in]a, b[$ mit $|x - x_0| \leq \delta$, so ist f bei x_0 lokal in eine Potenzreihe entwickelbar, für die der Konvergenzradius $\geq \delta$ ist.

(d.h. $\exists (a_k) : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = f(x) \forall x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$)

(ii) Falls es ein $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt, sodass $f^{(r)} = f$, so ist f bei x_0 lokal in eine Potenzreihe entwickelbar.

(iii) (Verallgemeinerung von (ii))

Falls es ein $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und reelle Zahlen a_0, \dots, a_{r-1} gibt, sodass $f^{(r)} = \sum_{j=0}^{r-1} a_j f^{(j)}$, dann ist f lokal bei x_0 in eine Potenzreihe entwickelbar.

Diese Potenzreihe ist in allen drei Fällen gegeben durch die **Taylorreihe**:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Beweis zu 5.3.4:

(i) Taylor: $|R_{n,\xi}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \underbrace{K \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}}_{\substack{\text{unabh. von } x \\ \Rightarrow \text{glm. Konv.}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overset{|x-x_0| < \delta}{\Rightarrow} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + 0$$

(ii) $f^{(r)} = f \Rightarrow f^{(r+k)} = f^{(k)} \forall k \in \mathbb{N}. \quad (*)$

Sei $\delta > 0$, jedoch so, dass $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq]a, b[$.

Sei $M_i := \max_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |f^{(i)}(x)|$ für $i \in \underline{r-1}$ (stetige Funktion auf Kompaktum).

$\Rightarrow |f^{(m)}(x)| \leq \max(M_0, \dots, M_{r-1}) =: M \forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, siehe (i).

(iii) Analog (ii) (nur mehr Schreibaufwand).

□

Nicht jede $C^{(\infty)}$ -Funktion ist (lokal) in eine Potenzreihe entwickelbar (d.h. analytisch)!**Beispiel 5.3.5:**

$$\text{Sei } f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0), \quad f \text{ stetig in } 0$$

$$f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h^2} - 0}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \text{ und } \lim_{h \rightarrow 0} f'(x) = 0.$$

Allgemein: $f^{(n)}(x) := \frac{P(x)}{Q(x)} e^{-1/x^2}$; P, Q Polynome, $x \neq 0$ und $f^{(n)}$ (induktiv) und $f^{(n)}(0) = 0$ und $f^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

$\Rightarrow f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, d.h. beliebig oft diffbar, aber Taylorreihe um 0 wäre identisch 0 (∞ Nullstellen).

$\Rightarrow f$ ist nicht in 0 lokal in eine Potenzreihe entwickelbar, d.h. in keinen noch so kleinen Umgebungen.

(Beachte: Aus „ $f'(x)$, $x \neq x_0$ gegeben“ und „ $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ existiert“ folgt nicht generell die Diffbarkeit von f in x_0 .)

Übung 5.3.Ü1:

GESUCHT: Potenzreihenentwicklung von $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^3}$.

Betrachte zunächst einmal:

$$f'(x) = (-1)(-3) \frac{1}{(1-x)^4} = \frac{3}{(1-x)^4}$$

$$f''(x) = (-1)(-4) \frac{3}{(1-x)^5} = \frac{12}{(1-x)^5}$$

Auffällig: Betrachte die geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ mit } |x| < 1 \Leftrightarrow x \in \mathcal{K}_1(0) \text{ in } \mathbb{R}$$

Leite beide Seiten ab:

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = (-1)(-1) \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow \text{gliedw. Diff. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ mit } x \in \mathcal{K}_1(0)$$

Leite erneut beide Seiten ab:

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = (-1)(-2) \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$\Leftrightarrow \text{gliedw. Diff. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} (n+1)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3} \text{ mit } x \in \mathcal{K}_1(0)$$

⋮

Nun gilt:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+1)x^n$$

$$\stackrel{\text{unendl. Distributivgesetz}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n \text{ mit } x \in \mathcal{K}_1(0)$$

Damit ist dies eine Potenzreihenentwicklung für f um $x_0 = 0$.**Differentialgleichung:** $f'(x) = cf(x)$, $c \in \mathbb{R}$ konstant.**Potenzreihenansatz:** $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ Also: $f' = cf \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} ca_n n x^{n-1}$ Wegen Identitätssatz für Potenzreihen: $a_{n+1}(n+1) = ca_n \forall n \in \mathbb{N}_0$ $\Rightarrow a_n = a_0 \frac{c^n}{n!}$ Übung aus Analysis I.

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \frac{c^n}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cx)^n}{n!} = a_0 e^{cx}$$

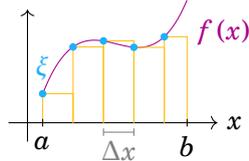
 a_0 frei wählbar (Anfangsbedingung).

→ Wachstums- oder Zerfallsprozesse.

6 Das Riemann-Integral in \mathbb{R}^1

MATHEMATIK (Leibniz)

- Problem:** Berechnung komplizierter Flächen
- Einfacher Fall:** Rechteck mit Seitenlängen a, b ,
Fläche = $a \cdot b$
- Komplizierter:** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion.
Gesucht: Fläche zwischen Graph von f
und x -Achse.
- Idee:** Annäherung durch kleine (schmale)
Rechtecke z.B. konst. Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$



Fläche des i -ten Rechtecks: $f(\xi_i) \cdot \Delta x$.

Fläche $\approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x$

PHYSIK (Newton)

- Berechnung Energie/Arbeit
- Kraft konstant längs des Weges, Arbeit
= Kraft \cdot Weg
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ skalares Kraftfeld ent-
lang des 1-dimensionalen Weges $[a, b]$
Gesucht: Verrichtete Arbeit.
- Unterteilung des Weges in kleine
Stücke mit näherungsweise konstan-
ter Kraft.
Stücke: $[a + i \frac{b-a}{n}, a + (i+1) \frac{b-a}{n}] =: I_i$
(n Intervalle, $i \in \underline{n}$).

Arbeit für Teilstück I_i : $f_i \cdot \Delta x$; f_i = Kraft
auf Teilstück I_i , $\approx f(\xi_i)$ für ein $\xi_i \in I_i$.

Gesamtarbeit $\approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x$

tatsächliche Fläche/Arbeit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i^{(n)}) \cdot \frac{b-a}{n}$$

6.1 Definition & einfache Eigenschaften

Definition 6.1.1: ZERLEGUNG UND RIEMANN-SUMMEN

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $I := [a, b]$, $a < b$.

$Z^{(n)} := \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}\}$ sei **Zerlegung** von I , d.h. $a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} = b$.

Für $j \in \underline{n}$ seien:

$$\bullet I_j^{(n)} := [x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)}]$$

$$\bullet m_j^{(n)} := \inf_{x \in I_j^{(n)}} f(x)$$

$$\bullet M_j^{(n)} := \sup_{x \in I_j^{(n)}} f(x)$$

$$\bullet l_j^{(n)} := |I_j^{(n)}| = x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}$$

Seien $m := \inf_{x \in I} f(x)$; $M := \sup_{x \in I} f(x)$; $\hat{M} := \sup_{x \in I} |f(x)|$.

$$\text{Riemann-Untersumme: } s(Z^{(n)}) := \sum_{j=1}^n m_j^{(n)} l_j^{(n)}$$

$$\text{Riemann-Obersumme: } S(Z^{(n)}) := \sum_{j=1}^n M_j^{(n)} l_j^{(n)}$$

Betrachtet werden muss nun für jedes $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ jede Zerlegung $Z^{(n)}$, ähnlich Grenzwerte.

Lemma 6.1.2:

Es gilt:

- a) $s(Z^{(n)}) \leq S(Z^{(n)}) \quad \forall n \forall Z^{(n)}$
 b) Ist eine Folge von Zerlegungen $(Z^{(n)})_n$ **hierarchisch**, d.h. $Z^{(n)} \subseteq Z^{(n+1)} \quad \forall n$, so gilt:

$$s(Z^{(n)}) \leq s(Z^{(n+1)}) \stackrel{a)}{\leq} S(Z^{(n+1)}) \leq S(Z^{(n)}) \quad \forall n$$

und somit (Monotoniekriterium für Folgen) sind die Folgen $(s(Z^{(n)}))_n$ und $(S(Z^{(n)}))_n$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s(Z^{(n)}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S(Z^{(n)})$.

Definition 6.1.3: RIEMANN-INTEGRALE

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $s(Z^{(n)})$, $S(Z^{(n)})$ die Ober-/Untersumme zu f .

- a) $\sup \{s(Z^{(n)}) \mid Z^{(n)} \text{ Zerlegung von } [a, b], n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} =: \underline{\int} =: \int_a^b f(x) dx$

heißt **unteres Riemann-Integral** von f oder **innerer Inhalt** von f .

$$\inf \{S(Z^{(n)}) \mid Z^{(n)} \text{ Zerlegung von } [a, b], n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} =: \overline{\int} =: \int_a^b f(x) dx$$

heißt **oberes Riemann-Integral** von f oder **äußerer Inhalt** von f .

Betrachtet werden für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ alle Zerlegungen $Z^{(n)}$!

Nicht verwechseln: \int ist ein Fraktur-„I“, kein „J“!

- b) f heißt **auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar** („R.-intbar“ oder „intbar“ solange wir noch kein anderes Integral kennen), falls

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Dann heißt

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

das **Riemann-Integral** von a bis b über f bzgl. x . Dann heißt f **Integrand**.

Achtung: Wir benutzen nirgendwo Beträge. „Flächeninhalt unter dem Graphen“ gilt also nur *über* der x -Achse.

Lemma 6.1.4: RIEMANN-INTEGRABILITÄTSKRITERIUM

Für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: f ist auf $[a, b]$ R-intbar $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists$ Zerlegung Z von $[a, b] : S(Z) - s(Z) < \varepsilon$

Beweis zu 6.1.4:

$$s(Z) \leq \underline{\int} \leq \overline{\int} \leq S(Z) \quad \forall \text{ Zerlegung } Z$$

$$\text{„}\Rightarrow\text{“} \quad \underline{\int} = \overline{\int} \Rightarrow \inf \{S(Z) \mid Z \text{ Zerlegung}\} = \sup \{s(Z) \mid Z \text{ Zerlegung}\}$$

Wähle $\varepsilon > 0$ fest, aber beliebig.

$\Rightarrow \exists$ Zerlegungen \hat{Z} und \tilde{Z} , sodass

- $0 \leq S(\hat{Z}) - \overline{\int} \leq \varepsilon$
- $0 \leq \underline{\int} - s(\tilde{Z}) \leq \varepsilon$

Sei $Z := \hat{Z} \cup \tilde{Z}$.

$$\Rightarrow \underline{\int} - \varepsilon \leq s(\tilde{Z}) \leq s(Z) \leq S(Z) \leq S(\hat{Z}) \leq \overline{\int} - \varepsilon$$

$$\Rightarrow 0 \leq S(Z) - s(Z) \leq \overline{\int} + \varepsilon - (\underline{\int} - \varepsilon) = 2\varepsilon$$

„ \Leftarrow “ $\forall \varepsilon > 0 \exists$ Zerlegung Z_ε von $[a, b] : S(Z_\varepsilon) - s(Z_\varepsilon) \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \varepsilon > S(Z_\varepsilon) - s(Z_\varepsilon) \geq \underbrace{\bar{J} - \underline{J}}_{\substack{\text{hängt nicht} \\ \text{von } \varepsilon \text{ ab}}} \geq 0$$

Jetzt z.B.: $\varepsilon := \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} > \bar{J} - \underline{J} \geq 0 \forall n$

$$\xRightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{J} - \underline{J} = 0$$

□

Beispiel 6.1.5: RIEMANN-INTEGRIERBARKEIT

a) „Dirichlet-Funktion“

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \text{ rational} \\ 1 & x \text{ irrational} \end{cases} \quad x \in [0, 1]$$

Sei $Z^{(n)}$ beliebige Zerlegung zu beliebigem n , in $I_j^{(n)} := [x_{j-1}, x_j]$ existieren rationale und irrationale Zahlen. $m_j^{(n)} = 0$, $M_j^{(n)} = 1$,

$$s(Z^{(n)}) = \sum_{j=1}^n m_j^{(n)} l_j^{(n)} = 0,$$

$$S(Z^{(n)}) = \sum_{j=1}^n M_j^{(n)} l_j^{(n)} = \sum_{j=1}^n l_j^{(n)} = |[0, 1]| = 1$$

$$\underline{J} = 0, \bar{J} = 1$$

$\Rightarrow f$ nicht R-intbar.

„Nr.1-Beispiel“ für nicht R-intbar.

b) $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$

Sei $Z^{(n)}$ eine beliebige Zerlegung, n beliebig.

$$s(Z^{(n)}) = \sum_{j=1}^n m_j^{(n)} l_j^{(n)} = \sum_{j=1}^n \underbrace{f(x_{j-1}^{(n)})}_{=x_{j-1}^{(n)}} l_j^{(n)}$$

$$S(Z^{(n)}) = \sum_{j=1}^n x_j^{(n)} (x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}) \text{ analog}$$

Spezielle Zerlegungsfolge: $x_j^{(n)} := \frac{j}{n}$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow s(Z^{(n)}) &= \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n (j-1)(j - (j-1)) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n (j-1) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} j \stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \frac{(n-1)(n-1+1)}{2n^2} \\ &= \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$S(Z^{(n)}) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n j(j - (j-1)) = \frac{n(n+1)}{n^2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Also: $s(Z^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$, $S(Z^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$$

Definition 6.1.6: RIEMANN-STIELTJES-INTEGRAL

Alles wie oben, jedoch: Sei $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktion.

$$l_j^{(n)} := \sigma(x_j^{(n)}) - \sigma(x_{j-1}^{(n)})$$

(d.h. obiger Fall ist Spezialfall)

Wenn $\underline{J} = \bar{J}$, dann heißt f bzgl. σ **Riemann-Stieltjes-integrierbar** („R.-S.-integrierbar“), und

$$\int_a^b f(x) d\sigma(x) := \underline{J} = \bar{J} \text{ heißt } \mathbf{Riemann-Stieltjes-Integral}.$$

Lemma 6.1.4 gilt auch für R.-S.-Integrale.

Beispiel 6.1.7: HEAVISIDE/DIRAC

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ gegeben, } \sigma(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}.$$

$l_j^{(n)} = \sigma(x_j^{(n)}) - \sigma(x_{j-1}^{(n)})$ ist nur $\neq 0$, wenn $x_{j-1}^{(n)} < 0 \leq x_j^{(n)}$, dann $l_j^{(n)} = 1$.

Sei \tilde{j} dieser Index. $s(Z^{(n)}) = m_{\tilde{j}}^{(n)} l_{\tilde{j}}^{(n)} = m_{\tilde{j}}^{(n)}$, $S(Z^{(n)}) = M_{\tilde{j}}^{(n)}$

Sei f stetig in 0. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, betrachte Zerlegung $Z^{(n)}$ mit $l_{\tilde{j}}^{(n)} = |I_{\tilde{j}}^{(n)}| < \delta(\varepsilon)$.

$$\Rightarrow f(0) - \varepsilon \leq m_{\tilde{j}} = s(Z^{(n)}) \leq S(Z^{(n)}) = M_{\tilde{j}}^{(n)} \leq f(0) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow 0 \leq S(Z^{(n)}) - s(Z^{(n)}) \leq f(0) + \varepsilon - (f(0) - \varepsilon) = 2\varepsilon$$

$\Rightarrow f$ ist R.-S.-intbar (Integrabilitätskriterium).

$$\int_{-1}^1 f(x) d\sigma(x) = f(0)$$

Geht auch allgemeiner: Sei $a < x_0 < b$, $\sigma(x) := \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ 1 & x \geq x_0 \end{cases}$

$$\delta_{x_0} : \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig in } x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f(x) d\sigma(x) = f(x_0)$$

Man kann eine Metrik für diesen Raum definieren.

Man nennt $\delta_{x_0}(f) = f(x_0)$ das **Dirac-Funktional**.

(Nennt man **Operatoren** (Abb. metr. Raum \rightarrow metr. Raum) oder **Funktional** (Abb. norm. Raum \rightarrow norm. Raum). \rightarrow Approximationstheorie, Physik (Elektrodynamik, Quantenmechanik), ...)

Satz 6.1.8: WEITERE INTEGRABILITÄTSKRITERIEN

- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f Riemann-integrierbar auf $[a, b]$.
Ist zusätzlich $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend, dann ist f R.-S.-intbar.
- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f R-intbar auf $[a, b]$.
Ist zusätzlich $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend und stetig, so ist f R.-S.-intbar.

Beweis zu 6.1.8:

1. Teil (R.-intbar) folgt aus 2. Teil (R.-S.-intbar) mit $\sigma(x) = x$.

a) f stetig auf Kompaktum $\Rightarrow f$ glm. stetig, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

Sei $\varepsilon > 0$ fest, $\delta = \delta(\varepsilon)$ gegeben. Sei Z Zerlegung; $\delta(Z) := \max_j l_j$. O.B.d.A. sei $\delta(Z) < \delta$ (siehe Lemma 6.1.2.a)), d.h. $|I_j| < \delta \forall j$.

$$\Rightarrow S(Z) - s(Z) = \sum_{j=1}^n \underbrace{(M_j - m_j)}_{< \varepsilon \text{ (glm. stetig)}} l_j < \varepsilon \sum_{j=1}^n l_j = \varepsilon \sum_{j=1}^n (\sigma(x_j) - \sigma(x_{j-1})) = \varepsilon \underbrace{(\sigma(b) - \sigma(a))}_{\text{(Teleskopsumme)}}$$

b) σ stetig auf $[a, b] \Rightarrow \sigma$ glm. stetig. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. $\Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) : (|x - y| < \delta \Rightarrow |\sigma(x) - \sigma(y)| < \varepsilon)$. Sei Z Zerlegung mit $\delta(Z) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow l_j < \varepsilon \forall j$.

$$\Rightarrow 0 \leq S(Z) - s(Z) = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) l_j < \varepsilon \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)$$

Sei o.B.d.A. f monoton wachsend (sonst betrachte $-f$).

$$\Rightarrow m_j = f(x_{j-1}), M_j = f(x_j) \text{ wegen Monotonie}$$

$$\Rightarrow 0 \leq S(Z) - s(Z) = \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) = \varepsilon (f(x_n) - f(x_0)) = \varepsilon (f(b) - f(a))$$

$\Rightarrow f$ ist R.-S.-intbar. □

Ab jetzt: $\sigma(x) = x$. Also:

f diffbar auf $[a, b] \Rightarrow f$ stetig auf $[a, b] \Rightarrow f$ R.-intbar

z.B.: $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ \neq $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$

Bzgl. der Gaußklammer: $[x] := \lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$ „abrunden“, unstetig in 0.

Sei Z Zerlegung von $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, sei I_j das Intervall mit der Eigenschaft, dass $x_{j-1} < 0 \leq x_j$. $\Rightarrow M_j = 0, m_j = -1$. Für alle anderen Intervalle ist f konstant ($M_j = m_j$).

$$\Rightarrow S(Z) - s(Z) = (0 - (-1)) \cdot l_j = l_j$$

Durch Verfeinerung der Zerlegung kann l_j beliebig klein werden. Wegen dem Integrierbarkeitskriterium (Lemma 6.1.4): f R.-intbar auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Aber eben unstetig in 0.

Alternativ: $[x]$ ist monoton wachsende Funktion. \Rightarrow R.-intbar.

Definition 6.1.9: RIEMANN-ZWISCHENSUMME

a) Eine Folge $(Z^{(n)})_n$ von Zerlegungen vom Intervall I heißt **Zerlegungsnullfolge**, falls

$$\delta(Z^{(n)}) := \max_j l_j^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(n muss nichts mit der Anzahl der Punkte zu tun haben, $Z^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)})$)

b) Sei $I := [a, b]$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, Z eine beliebige Zerlegung von I , $\xi_i \in I_i$ für $i \in \underline{n}$ beliebige Punkte.

$$S(Z; \xi_1, \dots, \xi_n) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j) l_j$$

heißt **Riemann-Zwischensumme**.

Satz 6.1.10: (DEFINITION NACH RIEMANN)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

Dann gilt: f ist auf $[a, b]$ R.-intbar genau dann, wenn \forall Zerlegungsnullfolge $(Z^{(n)})_n$ und jede Wahl passender Zwischenpunkte $\xi^{(n)} \in \mathbb{R}^{k_n}$ die Folge der Riemann-Zwischensummen konvergent ist.

In diesem Fall konvergieren die R.-Zwischensummen alle gegen den gleichen Grenzwert: $\int_a^b f(x) dx$ (gilt analog auch für R.-S.-Integral).

Beweis zu 6.1.10:Aus Zeitgründen weggelassen. □**Satz 6.1.11: EIGENSCHAFTEN DES RIEMANN-INTEGRALS**Seien f, g R.-intbar auf $I := [a, b]$. Dann gilt:a) **Linearität:** $\alpha f + \beta g$ sind R.-intbar $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

b) **Positivität:** Wenn $f \geq 0$ auf $[a, b]$, so ist

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

c) **Monotonie:** Wenn $f \leq g$ (d.h. $f(x) \leq g(x) \forall x$), dann ist

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

d) **Dreiecksungleichung** für Integrale: $|f|$ ist R.-intbar und

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

e) **Additivität** des Integrals (bzgl. des Integrationsbereichs):Sei $a < c < b$. $\Rightarrow f$ auf $[a, c]$ und $[c, b]$ R.-intbar und

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

f) **Definitheit:** Wenn $f \geq 0$, f stetig auf I und $\int_a^b f(x) dx = 0$, dann gilt: $f = 0$ (d.h. $f(x) = 0 \forall x$).**Beweis zu 6.1.11:**a) R.-Zwischensummen linear, GWS ($S_{\alpha f + \beta g}(Z^{(n)}; \xi^{(n)}) = \alpha S_f(Z^{(n)}; \xi^{(n)}) + \beta S_g(Z^{(n)}; \xi^{(n)})$).b) $m_j \geq 0 \Rightarrow s(Z) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \underline{J} \geq 0$.c) $f(x) \leq g(x) \forall x \in I$.

$$\Rightarrow 0 \leq g(x) - f(x) \forall x \in I$$

$$\stackrel{b)}{\Rightarrow} \int_a^b g(x) - f(x) dx \geq 0 \stackrel{a)}{\Rightarrow} \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

d) **Idee** zum Beweis der R.-Intbarkeit von $|f|$:

$$f^+(x) := \max(f(x), 0), \quad f^-(x) := \max(-f(x), 0)$$

Zeigen, dass f^+ und analog f^- R.-intbar ist (siehe Analysis-Bücher).

$$f = f^+ - f^- \quad \text{und} \quad |f| = f^+ + f^-. \Rightarrow |f| \text{ R.-intbar.}$$

Dann:

$$|S(Z^{(n)}; \xi^{(n)})| = \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j^{(n)}) I_j^{(n)} \right| \leq \sum_{j=1}^n |f(\xi_j^{(n)})| \underbrace{I_j^{(n)}}_{\geq 0}$$

$$\stackrel{n \rightarrow \infty}{\Rightarrow} \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

e) Die **charakteristische Funktion** oder **Indikatorfunktion** ist

$$\chi_D(x) := \begin{cases} 1 & x \in D \\ 0 & x \notin D \end{cases} \quad D \subseteq \mathbb{R}$$

$$f = \chi_{[a,c]} \cdot f + \chi_{[c,b]} \cdot f$$

$$\stackrel{\text{a)}}{\implies} \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b \chi_{[a,c]}(x) f(x) \, dx + \int_a^b \chi_{[c,b]}(x) f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

f) **indirekt**: Annahme: $\exists \xi \in I : f(\xi) \neq 0$, d.h. $f(\xi) > 0$.

f stetig: Sei $\eta := f(\xi)$. Zu $\varepsilon := \frac{\eta}{2}$ existiert $\delta > 0 : (|x - \xi| < \delta \implies |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon)$.

$\implies f(x) \geq \frac{\eta}{2} \quad \forall x \in \mathcal{U}_\delta(\xi)$, o.B.d.A. $\mathcal{U}_\delta(\xi) \subseteq I$

$g(x) := \frac{\eta}{2} \cdot \chi_{\mathcal{U}_\delta(\xi)}$ (Treppenfunktion, leicht z.z.: R.-intbar)

$$\int_a^b g(x) \, dx \stackrel{\text{b)}}{=} \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \frac{\eta}{2} \, dx = \frac{\eta}{2} \cdot 2\delta = \eta\delta$$

$$g \leq f \stackrel{\text{c)}}{\implies} 0 < \eta\delta = \int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \quad \text{!}$$

□

Definition 6.1.12: UMKEHREN DER INTEGRATIONSGRENZEN

Sei $a < b$, $c \in [a, b]$, f R.-intbar auf $[a, b]$.

- $\int_b^a f(x) \, dx := - \int_a^b f(x) \, dx$
- $\int_c^c f(x) \, dx := 0$

Grund: Erhält die Additivität. Aber **Achtung**: Monotonie gilt dabei nicht.

Bemerkung 6.1.13: INTEGRAL FÜR KOMPLEXWERTIGE FUNKTION

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

In \mathbb{C} gibt es keine Ordnung mehr, daher keine Ober-/Untersummen. Daher: Zwischensummen + GWS.

f ist (komplex) R.-intbar genau dann, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ (reell) R.-intbar sind. Dann ist

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x) \, dx + i \cdot \int_a^b \operatorname{Im} f(x) \, dx$$

Lemma 6.1.14:

a) Seien f, g R.-intbar, $f(x) = g(x) \quad \forall x \in D$, D dicht in I .

$$\implies \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx$$

b) Sei f R.-intbar, $h : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ glm. stetig. Dann ist $h \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ R.-intbar.

c) Sei f R.-intbar, außerdem $|f(x)| \geq \delta > 0 \quad \forall x \in I$. $\implies \frac{1}{f}$ R.-intbar.

Forderung $|f| \geq \delta > 0$, damit $\frac{1}{f}$ beschränkt ist durch $\frac{1}{\delta}$.

d) Seien f, g R.-intbar. $\implies f \cdot g$, $\max(f, g) = \min(f, g)$ R.-intbar.

Übung 6.1.Ü1:

Sei $I := [a, b]$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ R-intbar.

Dann ist $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ Lipschitzstetig.

Beweis:

Da f R-intbar, ist f per Definition beschränkt, d.h. $\exists K \in \mathbb{R}_0^+ : \forall x \in I : |f(x)| \leq K$.

Seien $x, y \in I$ beliebig. Betrachte:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^y f(t) dt \right| \\ \stackrel{\text{Additivität}}{=} \left| \int_a^y f(t) dt + \int_y^x f(t) dt - \int_a^y f(t) dt \right| &= \left| \int_x^y f(t) dt \right| \\ \stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \left| \int_x^y |f(t)| dt \right| &\leq \left| \int_x^y K dt \right| = K|x - y| \end{aligned}$$

$\Rightarrow F$ ist Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $K = \sup_{t \in I} |f(t)|$. □

Übung 6.1.Ü2: CAUCHY-SCHWARZ-BUNJAKOWSKI-UNGLEICHUNG (CSB)

Seien $f, g \in C[a, b]$. Dann gilt:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)$$

Dies ist ein Sonderfall von der CSB-Ungleichung für Skalarprodukte.

Beweis:

1. FALL: $\int_a^b g^2(x) dx = 0$

$\Rightarrow g = 0$ auf $[a, b]$, da g stetig.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) dx &= 0 \\ \Rightarrow 0 &\leq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

2. FALL: $\int_a^b g^2(x) dx \neq 0$

Sei $\lambda := \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g^2(x) dx}$. Betrachte:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) - \lambda g(x))^2 dx &\stackrel{2. \text{ Bin. F.}}{=} \int_a^b f^2(x) - 2\lambda g(x)f(x) + \lambda^2 g^2(x) dx \\ &\stackrel{\text{Lin. Int.}}{=} \int_a^b f^2(x) dx + 2\lambda \int_a^b g(x)f(x) dx + \lambda^2 \int_a^b g^2(x) dx \\ &\stackrel{\lambda \text{ eins.}}{=} \int_a^b f^2(x) dx - 2 \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g^2(x) dx} \int_a^b f(x)g(x) dx + \left(\frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g^2(x) dx} \right)^2 \int_a^b g^2(x) dx \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \frac{\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2}{\int_a^b g^2(x) dx} + \frac{\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2}{\int_a^b g^2(x) dx} \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - \frac{\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2}{\int_a^b g^2(x) dx} =: \Lambda \end{aligned}$$

Es gilt, da Quadrate immer positiv sind und für Integrale positiver Funktionen Positivität gilt:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \Lambda & \| + \lambda \cdot \int_a^b f(x)g(x) dx \\
 \Leftrightarrow \frac{\left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2}{\int_a^b g^2(x) dx} &\leq \int_a^b f^2(x) dx & \| \cdot \int_a^b g^2(x) dx \\
 \left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2 &\leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx
 \end{aligned}$$

□

6.2 Zentrale Sätze

Satz 6.2.1: MITTELWERTSATZ DER INTEGRALRECHNUNG

a) „1. MWS INT.“

Wenn $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, dann $\exists \xi \in I := [a, b] : \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$.

b) „2. MWS INT.“

Wenn $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $p : I \rightarrow \mathbb{R}$ R-intbar und $p \geq 0$, dann $\exists \xi \in I :$

$$\int_a^b f(x)p(x) dx = f(\xi) \int_a^b p(x) dx$$

(1. MWS INT. ist Spezialfall $p(x) = 1$ von 2. MWS INT.)

Beweis zu 6.2.1:

f stetig auf Kompaktum.

$$\Rightarrow \exists m := \min_{x \in I} f(x), \exists M := \max_{x \in I} f(x)$$

$$\Rightarrow m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in I$$

$$\stackrel{p \geq 0}{\Rightarrow} mp(x) \leq f(x)p(x) \leq Mp(x) \quad \forall x$$

$$\stackrel{\text{Mon. d. Int.}}{\Rightarrow} \int_a^b mp(x) dx \leq \int_a^b f(x)p(x) dx \leq \int_a^b Mp(x) dx \quad (*)$$

$$1. \text{ FALL: } \int_a^b p(x) dx \neq 0 \Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x)p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx} \leq M$$

$$\stackrel{\text{ZWS}}{\Rightarrow} \exists \xi \in I : f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}$$

$$2. \text{ FALL: } \int_a^b p(x) dx = 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} 0 \leq \int_a^b f(x)p(x) dx \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 = \int_a^b f(x)p(x) dx = f(\xi) \underbrace{\int_a^b p(x) dx}_{=0}$$

□

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ heißt **Integral-Mittelwert** von f .

Satz 6.2.2: HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG (HSDI)

(1) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ R-intbar und stetig in $\xi \in [a, b]$.

$$\Rightarrow F(x) := \int_c^x f(t) dt, \quad c \in [a, b], \quad x \in [a, b] \text{ in } \xi \text{ diffbar und } F'(x) = f(\xi).$$

(Somit: $f \in C(I) \Rightarrow F \in C^{(1)}(I)$; $f \in C^{(k)}(I) \Rightarrow F \in C^{(k+1)}(I)$, $k \in \mathbb{N}$.)

F mit $F' = f$ heißt **Stammfunktion** von f .

(2) Sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar. $\Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt$.

$$\text{Allgemein f\u00fcr } x, c \in [a, b]: F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t) dt.$$

Beweis zu 6.2.2:

$$(1) \frac{1}{h} (F(\xi+h) - F(\xi)) \stackrel{\text{Add.}}{=} \frac{1}{h} \int_{\xi}^{\xi+h} F'(t) dt \quad \text{und} \quad \int_{\xi}^{\xi+h} f(\xi) dt = f(\xi) \cdot h.$$

$$\Rightarrow \frac{F(\xi+h) - F(\xi)}{h} - f(\xi) = \frac{1}{h} \int_{\xi}^{\xi+h} f'(t) dt - \frac{1}{h} \int_{\xi}^{\xi+h} f(\xi) dt \stackrel{\text{Lin.}}{=} \frac{1}{h} \int_{\xi}^{\xi+h} f(t) - f(\xi) dt := A(h)$$

f stetig in ξ , d.h. $\exists \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon)$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $|h| < \delta(\varepsilon)$.

$$\Rightarrow |A(h)| \stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \frac{1}{|h|} \int_{\xi}^{\xi+h} |f(t) - f(\xi)| dt \stackrel{\text{Mon.}}{\leq} \left| \frac{1}{|h|} \int_{\xi}^{\xi+h} \varepsilon dt \right| = \frac{1}{|h|} \cdot \varepsilon \cdot |h| = \varepsilon$$

$$\Rightarrow A(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\xi+h) - F(\xi)}{h}}_{F'(\xi)} = f(\xi)$$

(2) $\int_c^x F'(t) dt := G(x)$ ist $C^{(1)}$ -Funktion mit $G' = F'$ (Teil 1).

$$G(c) = 0, \quad H := G - F, \quad H' = 0 \stackrel{\text{Kor. 5.2.3}}{\xrightarrow{\text{MWS DIFF}}} H \text{ ist konstant.}$$

$$\Rightarrow H(x) = H(c) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow G(x) - F(x) = G(c) - F(c) = 0 - F(c)$$

$$\Rightarrow \int_c^x F'(t) dt + F(c) = F(x)$$

□

Tabelle von Stammfunktionen:

$f = F'$	F (\pm Konstante)
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
e^x	e^x
x^α	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}, \alpha \neq -1$ bzw. $\ln x , \alpha = -1$

Die Differenzierbarkeitsordnung wird oft als Maß für die „Glattheit“ einer Funktion angesehen, d.h. Integrieren „glättet“ eine Funktion und Ableiten „raut“ eine Funktion auf.

Beispiel 6.2.3: HSDI

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$$

$$\text{b) } \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} 1^2 - \frac{1}{2} 0^2 = \frac{1}{2}$$

d.h. man schreibt $F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a)$

Satz 6.2.4: PARTIELLE INTEGRATION (INTEGRATION BY PARTS)

Seien $u, v \in C^{(1)}[\alpha, b]$.

$$\Rightarrow \int_a^b u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Beweis zu 6.2.4:

$$\underbrace{\int_a^b (uv)'(x) dx}_{\stackrel{2. \text{ HSDI}}{=} u(x)v(x) \Big|_a^b} \stackrel{\text{Prod.reg.}}{=} \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

□

Beispiel 6.2.5: ANWENDUNGEN PARTIELLER INTEGRATION

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_a^x \sin^2 t dt &= \int_a^x \underbrace{\sin(t)}_{u'(t)} \underbrace{\sin(t)}_{v(t)} dt = \underbrace{-\cos(t)}_{u(t)} \underbrace{\sin(t)}_{v(t)} \Big|_a^x - \int_a^x \underbrace{-\cos(t)}_{u(t)} \underbrace{\cos(t)}_{v'(t)} dt \\ &= -\cos(t)\sin(t) \Big|_a^x + \int_a^x \underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t} dt \\ &\Rightarrow \int_a^x \sin^2 t dt = (-\cos(t)\sin(t) + t) \Big|_a^x - \int_a^x \sin^2 t dt \quad \parallel + \int_a^x \sin^2 t dt \\ &\Rightarrow 2 \int_a^x \sin^2 t dt = (t - \cos(t)\sin(t)) \Big|_a^x \\ &\Rightarrow \int_a^x \sin^2 t dt = \frac{1}{2} (t - \cos(t)\sin(t)) \Big|_a^x \quad \leftarrow \text{Stammfkt. von } \sin^2 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int_a^x \ln t dt = \int_a^x \underbrace{1}_{u'(t)} \cdot \underbrace{\ln t}_{v(t)} \Big|_a^x - \int_a^x \underbrace{t}_{u(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{t}}_{v'(t)} dt = (t \cdot \ln t - t) \Big|_a^x$$

Satz 6.2.6: SUBSTITUTIONSREGEL

Seien $g \in C^{(1)}[\alpha, b]$, $f \in C^{(0)}(g([\alpha, b]))$, $g'(x) \neq 0 \forall x \in]\alpha, b[$.

$$\Rightarrow \int_{g(\alpha)}^{g(b)} f(t) dt = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

Beweis zu 6.2.6:

Sei F Stammfunktion von f (existiert wegen 1. HSDI).

$$\int_a^b (F \circ g)'(x) dx \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b F'(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

|| 2. HSDI

$$(F \circ g)(x) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(\alpha)) = F(t) \Big|_{g(\alpha)}^{g(b)} \stackrel{2. \text{ HSDI}}{=} \int_{g(\alpha)}^{g(b)} F'(t) dt = \int_{g(\alpha)}^{g(b)} f(t) dt$$

□

Beispiel 6.2.7: ANWENDUNGEN DER SUBSTITUTIONSREGEL

$$\text{a) } \int_0^1 e^{2x} dx = ?, f(t) := e^t, g(x) := 2x, f(g(x)) = e^{2x}, g'(x) = 2 \neq 0 \checkmark$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 e^{2x} \cdot 2}_{\text{r.S. d. Subst.r.}} = \frac{1}{2} \int_{g(0)}^{g(1)} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 e^t dt = \frac{1}{2} \cdot e^t \Big|_0^2 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2}$$

(Substitutionsregel von rechts nach links)

$$\text{b) } \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = ?, f(t) := \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, y \in]0, 1[, g(x) := \sin x, g'(x) = \cos x$$

$$g(a) = 0, g(b) = y \Rightarrow a = 0, b = \arcsin y$$

$$f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|}$$

$$\Rightarrow \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\arcsin y} \frac{1}{\cos x} \cdot \cos x dx = \int_0^{\arcsin y} 1 dx = \arcsin y$$

(Substitutionsregel von links nach rechts)

$$\text{c) } \int_0^y \frac{1}{1+t^2} dt = ?, f(t) := \frac{1}{1+t^2}, g(x) := \tan x, g'(x) = 1 + \tan^2 x$$

Offensichtlich ist $g' \neq 0$, da Quadrate immer positiv sind.

$$\int_0^y \frac{1}{1+t^2} dt = \int_{\tan(\arctan 0)}^{\tan(\arctan y)} \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$\stackrel{\text{Substitution}}{=} \int_{\arctan 0}^{\arctan y} \frac{1}{1+\tan^2 t} \cdot (1+\tan^2 t) dt = \int_{\arctan 0}^{\arctan y} 1 dt = t \Big|_{\arctan 0}^{\arctan y} = \arctan y$$

Definition 6.2.8: UNBESTIMMTES INTEGRALSei f \mathbb{R} -intbar. Dann bezeichnet das sogenannte **unbestimmte (Riemann-)Integral**

$$\int f(x) dx$$

die Menge aller Stammfunktionen von f .Häufige Schreibweise: Wenn F eine Stammfunktion von f , schreibt man $\int f(x) = F(x) + \text{const.}$

Beachte:

Beispiel 6.2.9:

$$f(x) := \frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$F(x) := \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + 27 & x > 0 \\ -\frac{1}{x} + \pi & x < 0 \end{cases} \text{ ist eine Stammfunktion von } f.$$

$$\text{Wie auch } \tilde{F}(x) := \frac{1}{x}, x \neq 0.$$

$$\text{d.h. } F(x) \neq \tilde{F} + \text{const.}$$

Daher schreibt man oft auch eine Stammfunktion als Repräsentant. Das $+\text{const.}$ stimmt für stückweise definierte Funktionen ohnehin nicht mehr, also kann man es auch weglassen, wenn der Zusammenhang klar ist.

Beispiel 6.2.10: PARTIALBRUCHZERLEGUNG

Verfahren zur Integration rationaler Funktionen (d.h. Quotienten von Polynomen).

z.B. $\int \frac{1}{x^2+3x+2}$

- Faktorisierung des Nenners, soweit in \mathbb{R} möglich:

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$$

- Betrachte Nenner als Hauptnenner von Brüchen mit Einzelfaktoren als Nenner:

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{(A+B)x+A+2B}{x^2+3x+2}$$

- bestimme A und B : „Koeffizientenvergleich“

$$A + B = 0, \quad A + 2B = 1 \xrightarrow{\text{LGS}} B = 1, \quad A = 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = \int \frac{-1}{x+2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = -\ln|x+2| + \ln|x+1| + \text{const}$$

Bei höherer Vielfachheit (d.h. $(x+c)^k$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$):

entweder $\frac{A_1}{x+c} + \frac{A_2}{(x+c)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x+c)^k}$ oder ein Summand: $\frac{B_0 + B_1x + \dots + B_{k-1}x^{k-1}}{(x+c)^k}$

sofern Zählergrad < Nennergrad.

Wenn Zählergrad \geq Nennergrad: erst Polynomdivision.

Alternative zum Koeffizientenvergleich: **Einsetzmethode/Zuhaltetechnik**

Bsp.: $f(x) := \frac{8x+9}{(x+2)(x^2+6x+9)} = \frac{8x+9}{(x-2)(x+3)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$, n Unbekannte ($n = 3$).

- Hauptnenner bilden, Zähler:

$$8x + 9 = A(x+3)^2 + B(x-2)(x+3) + C(x-2),$$

zunächst $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$, durch stetige Fortsetzung $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Einsetzen von n Punkten, inkl. Nullstellen des Nenners

$$x = -3: -15 = C \cdot (-5) \Rightarrow C = 3$$

Wegen Nullstellenfaktoren fallen die anderen Unbekannten weg. Deshalb auch „Zuhalten“.

$$x = 2: 25 = A \cdot 25 \Rightarrow A = 1$$

Wegen doppelter Nullstelle gibt es keinen dritten einfachen Punkt. Wähle zum Schluss „irgendeinen“ Punkt, der sich z.B. einfach berechnen lässt.

$$\text{z.B. } x = 0: 9 = 9 + B \cdot (-6) + (-6) \Rightarrow B = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+3} + \frac{3}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \ln|x-2| - \ln|x+3| - \frac{3}{x+3} + \text{const.}$$

Folgende Terme können bei einer Partialbruchzerlegung allgemein auftauchen:

- x^k , $k \in \mathbb{N}$, $\int x^k dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1}$
- $\frac{1}{(x-a)^k}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, Substituiere $t = x - a$, $\int \frac{1}{t^k} dt \dots$
- $\frac{ax+b}{(x^2+2cx+d)^k}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c^2 < d \rightarrow$ verschiedene Substitutionen (sofern möglich)

im Zweifelsfall konsultiert man Integraltabellen, z.B. Bronstein, Semendjajew.

Beispiel 6.2.11:

Sei h stetig diffbar auf $[a, b]$; **Substitution** $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(x) = h(x)$, $f(g(x)) = \frac{1}{h(x)}$

$$\int_a^b \frac{h'(x)}{h(x)} dt \stackrel{\text{!}}{=} \int_{h(a)}^{h(b)} \frac{1}{t} dt = \ln|t| \Big|_{h(a)}^{h(b)} = \ln|h(x)| \Big|_a^b$$

6.3 Uneigentliche Integrale

Definition 6.3.1: UNEIGENTLICH INTEGRIERBAR

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

a) Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ auf $]a, c[\forall c \in]a, b[$ R.-intbar.

f heißt **uneigentlich integrierbar** auf/über $]a, b[$ oder $[a, b]$, falls folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

$$\text{dann: } \int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

$$(\text{Analog: } f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx)$$

b) Sei $f :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ R.-intbar auf $]a, c[\forall c > a$.

f heißt **uneigentlich intbar** über $]a, +\infty[$, falls existiert:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx$$

$$\text{dann: } \int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx$$

c) Wenn $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ auf $]a, d[$ und auf $]d, b[$ für (mindestens) ein $d \in]a, b[$ uneigentlich intbar ist, so heißt f auf $]a, b[$ uneigentlich intbar und

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx \quad (\text{praktisch wie Additivität})$$

d) analog zu c): $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf $]-\infty, d[$ und $]d, +\infty[$ jeweils uneigentlich intbar für (mindestens) ein $d \in \mathbb{R}$. Dann heißt f auf \mathbb{R} uneigentlich intbar und wir setzen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^d f(x) dx + \int_d^{+\infty} f(x) dx$$

Bsp.: $\int_{-\infty}^{+\infty}$ Gaußsche Glockenfunktion $= \sqrt{\pi} \rightarrow$ Analysis III, Stochastik

e) Analog: $f :]a, b[\setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x_0 \in]a, b[$.

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx$$

falls beide uneigentlichen Integrale der rechten Seite existieren.

Beispiel 6.3.2: UNEIGENTLICHE INTEGRALE

a) $f(x) := x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fest.

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| & \alpha = -1 \end{cases}$$

Sei $c > 0$:

$$\int_1^c x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} (c^{\alpha+1} - 1) & \alpha \neq -1 \\ \ln c - 0 & \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha dx = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha+1} & \alpha < -1 \\ +\infty & \alpha \geq -1 \end{cases}$$

Also: x^α auf $[1, +\infty[$ (allg.: $[a, +\infty[$, $a > 0$) uneigentlich intbar $\Leftrightarrow \alpha < -1$.

$$\int_c^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} (1 - c^{\alpha+1}) & \alpha \neq -1 \\ -\ln c & \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} & \alpha > -1 \\ +\infty & \alpha \leq -1 \end{cases}$$

Also: x^α auf $]0, 1]$ (bzw. $]0, a]$, $a > 0$)

- für $\alpha \geq 0$: „normal R.-intbar“,
- für $\alpha > -1$ uneigentlich intbar,
- für $\alpha \leq -1$ *nicht* (uneigentlich) intbar.

Somit: x^α auf $]0, +\infty[$ für *kein* $\alpha \in \mathbb{R}$ uneigentlich intbar ($\int_0^{+\infty} x^\alpha dx = +\infty \forall \alpha \in \mathbb{R}$).

Negativer Teil analog.

b) $\Gamma(t) := \int_0^{+\infty} \exp(-x)x^{t-1} dx$ existiert für $t \geq 1$.

Es gilt: $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \forall t \geq 1$ (Die Gamma-Funktion ist die Verallgemeinerung der Fakultät.)

Beweis zu 6.3.2:**Existenz:**

Seien $t \in [1, +\infty[$, $x \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig. Betrachte:

$$f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-x)x^{t-1} = \frac{x^{t-1}}{e^x}$$

Da $\exp x$, $-x$, x^α stetig sind, ist auch f stetig. Damit ist f auch R.-intbar.

Es ist z.z., dass $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f(x) dx$ existiert.

Sei o.B.d.A. $c \in]1, +\infty[$. Dann gilt:

$$\int_0^c f(x) dx \stackrel{\text{Additivitat}}{=} \int_0^1 f(x) dx + \int_1^c f(x) dx \quad (*)$$

Da f auf \mathbb{R}_0^+ R.-intbar ist, existiert $\int_0^1 f(x) dx$ trivialerweise. Betrachte nun also $f|_{[1, +\infty[}$ (ebenfalls R.-intbar).

Es gilt nach dem Integralkriterium:

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{t-1}}{e^n}$$

Betrachte:

$$\frac{\left(\frac{(n+1)^{t-1}}{e^{n+1}}\right)}{\left(\frac{n^{t-1}}{e^n}\right)} = \frac{(n+1)^{t-1}}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n^{t-1}} = \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{t-1}}_{\text{stetig}} \cdot \frac{1}{e} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1^{t-1} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

Somit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ nach dem Quotientenkriterium (mit \limsup), also gilt:

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty$$

Also existiert das uneigentliche Integral. Nach GWS gilt nun ($c \rightarrow +\infty$ in (*)):

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} f(x) dx}_{\Gamma(t)} = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ existiert.}$$

Funktionalgleichung:

$$\text{Es gilt: } \Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} \exp(-x)x^{t+1-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^t dx$$

Sei $t \in [1, +\infty[$ beliebig. Sei außerdem $c \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig. Betrachte:

$$\int_0^c \underbrace{e^{-x}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{x^t}_{v(x)} dx \stackrel{\text{partielle Integration}}{=} \underbrace{-e^{-x}x^t}_{u(x)v(x)} \Big|_0^c - \int_0^c \underbrace{-e^{-x}}_{u(x)} \cdot \underbrace{tx}_{v'(t)} dx \stackrel{\text{Lin. Int.}}{=} -\frac{c^t}{e^c} + \frac{0}{e^0} + t \int_0^c e^{-x}x^{t-1} dx$$

Lasse nun $c \rightarrow +\infty$ laufen, dann würde nach GWS gelten:

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x}x^t dx}_{\Gamma(t+1)} \stackrel{!}{=} t \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1} dx}_{\Gamma(t)} - \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{c^t}{e^c} \text{ konvergent?}$$

Betrachte also noch $\frac{c^t}{e^c}$. Sei o.B.d.A. $c \in [1, +\infty[$.

Es gilt: $\frac{c^t}{e^c}$ ist streng monoton fallende Nullfolge (s.o. als Nebenprodukt des Quotientenkriteriums).

$$\Rightarrow \frac{c^t}{e^c} \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \Gamma(t+1) = t \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1} dx - 0 = t\Gamma(t)$$

□

Satz 6.3.3:

Sei $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann sind äquivalent:

- $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ existiert (d.h. $\in \mathbb{R}$, $< +\infty$).
- \exists Stammfunktion F von f , sodass $\lim_{c \rightarrow +\infty} F(c)$ existiert.
- \forall Stammfunktionen F von f existiert $\lim_{c \rightarrow \infty} F(c)$.

Beweis zu 6.3.3:

Trivial.

□

Lemma 6.3.4:

Sei $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in [a, b]$, mit der Eigenschaft, dass \forall Folge $(y_n) \subseteq [a, b]$ mit $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$ der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} h(y_n)$ existiert.

\Rightarrow Der Grenzwert von $h(y_n)$ ist für all solche Folgen der gleiche.

Analog: $h : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $y_n \rightarrow \infty$ und $h :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y_n \rightarrow -\infty$

Beweis zu 6.3.4:

Seien $(y_n), (z_n)$ zwei solche Folgen. Definiere eine neue Folge (w_n) mit

$$w_{2k} := y_k, w_{2k+1} := z_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

d.h. $w = (y_0, z_0, y_1, z_1, y_2, \dots)$

$\Rightarrow w_n \rightarrow x_0 \stackrel{\text{Vor.}}{\implies} \lim_{n \rightarrow \infty} h(w_n)$ existiert.

\Rightarrow alle Tf. von $(h(w_n))_n$, insbesondere $(h(y_k))_k$ und $(h(z_k))_k$, konvergieren gegen den gleichen Limes. \square

Satz 6.3.5:

Sei $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_0^+$ gegeben mit:

- (i) $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ existiert (d.h. $\in \mathbb{R}$).
- (ii) f auf $[a, c]$ intbar $\forall c \geq a$.
- (iii) $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty[$ („ g majorisiert f “).

Dann existiert $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ (analog für $]a, b]$, $[a, b[,]-\infty, a]$).

Beweis zu 6.3.5:

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ existiert $\stackrel{\text{Def.}}{\iff} \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx$ existiert

$\Leftrightarrow \forall$ Folge (c_n) mit $c_n \rightarrow +\infty$ existiert $\int_a^{c_n} f(x) dx$ (und der Grenzwert ist immer gleich, \rightarrow Lemma 6.3.4)

$\Leftrightarrow \forall$ Folge (c_n) mit $c_n \rightarrow +\infty$ ist $(\int_a^{c_n} f(x) dx)_n$ eine Cf. in \mathbb{R} .

Gilt bereits für g . Sei (c_n) beliebige Folge mit $c_n \rightarrow \infty$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : (o.B.d.A. c_n \geq c_m)$

$$\left| \int_a^{c_n} f(x) dx - \int_a^{c_m} f(x) dx \right| \stackrel{\text{Add.}}{=} \left| \int_{c_m}^{c_n} f(x) dx \right| \stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \int_{c_m}^{c_n} |f(x)| dx \stackrel{\text{(iii)}}{\leq} \int_{c_m}^{c_n} g(x) dx \stackrel{\text{(i)}}{\leq} \varepsilon$$

\square

Beispiel 6.3.6:

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = ?$ Betrachte:

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-c} \frac{1}{x} dx + \int_c^1 \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{c \rightarrow 0^+} (\ln|-c| - \ln|-1| + \ln 1 - \ln c) = 0$$

Dies ist ein **fehlerhafter** Ansatz für uneigentliche Integrale!

Korrekt:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \lim_{b \rightarrow 0^-} \left(\int_{-1}^b \frac{1}{x} dx + \int_a^1 \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \lim_{b \rightarrow 0^-} \left(\underbrace{\ln|b|}_{\rightarrow -\infty} - \underbrace{\ln|-1|}_{=0} + \underbrace{\ln 1}_{=0} - \underbrace{\ln a}_{\rightarrow +\infty} \right)$$

\rightarrow existiert nicht!

$\Rightarrow \frac{1}{x}$ ist *nicht* uneigentlich intbar auf $[-1, 1]$.

Definition 6.3.7: CAUCHY'SCHER HAUPTWERT

Seien $a < x_0 < b$, $f : [a, b] \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$.
Falls der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

existiert, so wird er als **Cauchy'scher Hauptwert** (*Cauchy principal value*) des Integrals von f über $[a, b]$ bezeichnet.

Notationen:

$$\text{CH-} \int_a^b f(x) dx, \quad \text{Hw} \int_a^b f(x) dx, \quad \text{pv} \int_a^b f(x) dx$$

Ist f auf $[a, x_0[$ und auf $]x_0, b]$ jeweils uneigentlich intbar, so besitzt f C.H. auf $[a, b]$.
Die Umkehrung i.A. gilt nicht! Siehe voriges Beispiel.

Satz 6.3.8: INTEGRALKRITERIUM FÜR REIHEN

Sei $f : [p, +\infty[\rightarrow [a, +\infty[$ monoton fallend, $p \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \sum_{n=p+1}^{\infty} f(n) \leq \int_p^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=p}^{\infty} f(n)$$

(Auch in dem Sinne, dass ein Teil $+\infty$ sein darf.)

Beweis zu 6.3.8:

Idee: Über Ober-/Untersummen. □

Beispiel 6.3.9: INTEGRALKRITERIUM

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_p^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Übung 6.3.Ü1: INTEGRALKRITERIUM

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ konvergent?

Es gilt nach dem Integralkriterium:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha} \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx$$

TRIVIALFALL: Für $\alpha = 0$ gilt:

Sei $c \in]1, +\infty[$.

$$\int_2^c \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx = \int_2^c \frac{1}{x} dx \stackrel{\text{HSDI}}{=} \ln|c| - \ln|2| = \ln c - \ln 2 \xrightarrow{c \rightarrow \infty} +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha} = +\infty \text{ für } \alpha = 0$$

⋮

Für $\alpha = 0$ gilt:
Sei $c \in]e, +\infty[$.

$$\int_2^c \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx = \int_2^c \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} dx \stackrel{\text{Substitution } g(x):=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{\ln c} \frac{1}{x} dx \stackrel{\text{HSDI}}{=} \ln|x| \Big|_{\ln 2}^{\ln c} = \ln|\ln c| - \ln|\ln 2| \xrightarrow[\ln]{c \rightarrow \infty} +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha} = +\infty \text{ für } \alpha = 1$$

Sei nun also $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $c \in]1, +\infty[$.

$$\int_1^c \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx = \int_1^c \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^{-\alpha} dx$$

$$\stackrel{\text{p.l.}}{=} \frac{\ln x}{(\ln x)^\alpha} \Big|_1^c - \int_1^c \frac{\ln x \cdot (-\alpha)(\ln x)^{-\alpha}}{u(x)v'(x)} dx = (\ln x)^{-\alpha+1} \Big|_1^c + \alpha \int_1^c \frac{1}{x} (\ln x)^{-\alpha} dx \quad \| - \int_1^c \dots$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha) \int_1^c \frac{1}{x} (\ln x)^{-\alpha} dx = (\ln|c|)^{-\alpha+1} - (\ln|1|)^{-\alpha+1} \quad \| \cdot \frac{1}{1-\alpha} \dots$$

$$\Leftrightarrow \int_1^c \frac{1}{x} (\ln x)^{-\alpha} dx = \frac{(\ln c)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}$$

Bei $c \rightarrow +\infty$ gilt: $\ln c \rightarrow +\infty$. Ist $\alpha < 1$, so steht $\ln c$ im Zähler. Ist $\alpha > 1$, steht $\ln c$ im Nenner.

$$\Rightarrow \int_1^c \frac{1}{x} (\ln x)^{-\alpha} dx \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \alpha < 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

Analog dazu ist $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} (\ln x)^{-\alpha} dx = +\infty$ für $\alpha < 1$. $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ konvergent $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

(Geht aber auch ohne Integralkriterium über Cauchy'schen Verdichtungssatz.)

6.4 Folgen und Reihen von Funktionen III

Satz 6.4.1: SATZ ÜBER GLIEDWEISE INTEGRATION

Seien $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, R.-intbar und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{C[a,b]} = 0$.

Dann ist auch f R.-intbar und $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$.

Beweis zu 6.4.1:

Konvergenz:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \stackrel{\text{Lin.}}{=} \left| \int_a^b f(x) - f_n(x) dx \right| \stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \int_a^b \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \varepsilon} dx$$

$$\stackrel{\text{Mon.}}{\leq} \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon \underbrace{(b-a)}_{\text{Konstante}}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

R.-intbarkeit von f : wird weggelassen. □

Auch hier wieder: Vertauschen von Grenzwerten (Integral ist auch Grenzwert).

Entsprechend für Reihen: Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ R.-intbar $\forall n$ und konvergiere $\sum_{n=0}^N f_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig.

$$\Rightarrow f \text{ R.-intbar und } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Beispiel 6.4.2: FOURIER-REIHEN

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx))$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < +\infty$ (l_1 -Folge)
 \Rightarrow Fourier-Reihe ist *gleichmäßig* konvergent.

$$\int_0^t f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k (-\cos(kt) + 1) \frac{1}{k} + b_k \cdot \frac{1}{k} \sin(kt) \right)$$

Korollar 6.4.3: POTENZREIHENINTEGRATION

Potenzreihen dürfen im Inneren des Konvergenzkreises beliebig oft gliedweise integriert werden.

Satz 6.4.4: SATZ ÜBER GLIEDWEISE DIFFERENTIATION (VERALLGEMEINERT)

Seien $I := [a, b]$, $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar, (punktweise) gegen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvergent, (f'_n) *gleichmäßig* konvergent auf I .

$\Rightarrow f$ stetig diffbar auf I und $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad \forall x \in I$.

(d.h. $\frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$) (analog für Reihen)

Beweis zu 6.4.4:

Sei $g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad \forall x \in I$ (glm.).

z.z.: $g = f'$

Nach dem Satz über gliedweise Integration gilt:

$$\int_a^x g(t) dt = \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) dt \stackrel{6.4.1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt \stackrel{2. \text{HSDI}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^x g(t) dt = f(x) - f(a)$$

$$\stackrel{1. \text{HSDI}}{\Rightarrow} g(x) = f'(x) \text{ und } f \text{ ist diffbar.}$$

□

Übung 6.4.Ü1: RAUM DER STETIG DIFFBAREN FUNKTIONEN

$C^{(1)}[a, b]$ mit der Norm $\|f\|_{C^{(1)}[a, b]} := \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$ für $f \in C^{(1)}[a, b]$ ist ein Banachraum.

Beweis:

- $C^{(1)}[a, b]$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum mit werteweiser Addition und werteweiser Skalarmultiplikation von Funktionen, da als Teilraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ diese unter stetiger Differenzierbarkeit abgeschlossen sind (leicht nachzurechnen).

- Ist $f \in C^{(1)}[a, b]$ die Norm $\|f\|_{C^{(1)}[a, b]}$ durch die Addition von anderen Normen definiert ist, ist diese trivialerweise positiv definit, durch Distributivgesetze in \mathbb{R} homogen, und durch die Dreiecksungleichung der einzelnen Normen gilt auch hier die Dreiecksungleichung (leicht nachzurechnen).

$C^{(1)}[a, b]$ ist also ein normierter Raum.

- Noch z.z.: **Vollständigkeit.** Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C^{(1)}[a, b]$ eine Cauchy-Folge stetig diffbarer Funktionen, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : \|f_n - f_m\|_{C^{(1)}[a, b]} < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$, $n_0(\varepsilon)$ geeignet und $n, m \geq n_0(\varepsilon)$ geeignet. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_{C^{(1)}[a, b]} &= \|f_n - f_m\|_{\infty} + \|f'_n - f'_m\|_{\infty} \\ &= \sup_{x \in [a, b]} |f_n - f_m| + \sup_{x \in [a, b]} |f'_n - f'_m| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Beträge positiv} &\implies \forall x \in [a, b]: |f_n(x) - f_m(x)| + |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon \\ &\implies \forall x \in [a, b]: (f_n(x)) \text{ und } (f'_n(x)) \text{ sind Cauchy-Folgen in } \mathbb{R} \\ &\implies \forall x \in [a, b] \exists f(x), g(x) \in \mathbb{R}: f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x), f'_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x) \text{ (sogar gleichmäßig)} \end{aligned}$$

Konstruiere also $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$.

Da f_n und f'_n stetig sind, kann man auch mit f und g Grenzwerte vertauschen. $\implies f, g$ stetig.

Außerdem gilt nach dem Satz über gliedweise Differentiation (6.4.4):

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d}{dx} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n(x)) = g(x)$$

Damit ist $f \in C^{(1)}[a, b]$.

Dann gilt insbesondere für die Suprema für hinreichend großes n :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, b]} |f_n - f| + \sup_{x \in [a, b]} |f'_n - f'| &< \varepsilon \\ \implies \|f_n - f\|_{C^{(1)}[a, b]} &< \varepsilon \\ \implies f_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \end{aligned}$$

Damit ist die beliebige Cauchy-Folge f_n konvergent und somit $C^{(1)}[a, b]$ vollständig. □

6.5 Banachräume und Differentialgleichungen

Satz 6.5.1:

Der Operator $\Phi: C(I) \rightarrow C(I)$, gegeben durch

$$\Phi(f)(x) := \int_a^x f(t) dt, \quad x \in I, \quad f \in C(I), \quad \text{d.h. } \Phi(f) \in C(I),$$

ist linear und stetig (wegen HSDI sogar $C^{(1)}(I)$).

Beweis zu 6.5.1:

- (1) $\Phi(f) \in C(I)$: aus HSDI: $\Phi(f)$ ist diffbar \implies stetig.
- (2) **Linearität**: wegen der Linearität des Integrals.
- (3) **Stetigkeit**: z.z. $f_n \rightarrow f$ in $C(I) \implies \Phi(f_n) \rightarrow \Phi(f)$ in $C(I)$
(d.h. $\|f_n - f\|_{C(I)} \rightarrow 0 \implies \|\Phi(f_n) - \Phi(f)\|_{C(I)} \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \|\Phi(f_n) - \Phi(f)\|_{C(I)} &\stackrel{(2)}{=} \|\Phi(f_n - f)\|_{C(I)} \stackrel{\text{z.B. max-Norm}}{=} \max_{x \in I} \left| \int_a^x f_n(t) - f(t) dt \right| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \max_{x \in I} \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \stackrel{\text{Add. Mon.}}{\leq} \max_{x \in I} \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \stackrel{\text{Mon.}}{\leq} \|f_n - f\|_{C(I)} (b - a) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Ein **Operator** ist eine Abbildung von unendlich-dimensionalem Raum in unendlich-dimensionalem Raum.

Operatorenorm: $\|\Phi\| := \sup_{\substack{g \in C(I) \\ g \neq 0}} \frac{\|\Phi(g)\|_{C(I)}}{\|g\|_{C(I)}} \leq b - a.$

→ Funktionalanalysis

Anwendung 6.5.2: DIFFERENTIALGLEICHUNG (DGL)**Anfangswertproblem (AWP)** (*initial value problem*): $y' = \alpha y$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ konstant, $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, hier: $[a, b] = [0, \frac{1}{2\alpha}] =: \tilde{I}$. $y(0) := y_0$. $\stackrel{\text{HDSI}}{\iff} y(x) = y_0 + \alpha \int_0^x y(t) dt$ (**Volterra'sche Integralgleichung**)

Funktionalanalytische Formulierung:

$$T : C(I) \rightarrow C(I)$$

Für $f \in C(I)$ mit $y = Ty$, d.h.: Wir suchen einen **Fixpunkt** von T . \rightarrow Banach'scher Fixpunktsatz

- $C(I)$ ist **vollständig** auf kompaktem I . \checkmark
- $Tf \in C(I) \forall f \in C(I)$ (**Selbstabbildung**). \checkmark
- **Kontraktion?**

$$f, g \in C(I) \Rightarrow (Tf)(x) - (Tg)(x) = \alpha \int_0^x f(t) dt - \alpha \int_0^x g(t) dt$$

$$\|Tf - Tg\|_{C(I)} = \max_{x \in I} \left| \alpha \int_0^x f(t) - g(t) dt \right| \leq \alpha \|f - g\|_{C(I)} \cdot \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2} \|f - g\|_{C(I)}$$

 \Rightarrow Kontraktion. \checkmark $\Rightarrow \exists!$ Fixpunkt von $T \Leftrightarrow$ AWP hat genau eine Lösung.**Fixpunktiteration:**Wähle beliebigen Anfangswert, z.B. y_0 konstante Funktion. „0-te Näherung“ y_n n-te Näherung, Funktion! $y_n(x) = T(y_{n-1})(x) = y_0 + \alpha \int_0^x y_{n-1}(t) dt$

$$y_1(x) = y_0 + \alpha \int_0^x y_0 dt = y_0 + \alpha y_0 x$$

$$y_2(x) = y_0 + \alpha \int_0^x y_1(t) dt = y_0 + \alpha \int_0^x (y_0 + \alpha y_0 t) dt = y_0 + \alpha y_0 x + \alpha^2 y_0 \frac{1}{2} x^2$$

$$y_3(x) = \dots = y_0 + y_0 \left(\alpha x + \alpha^2 \frac{1}{2} x^2 + \alpha^3 \frac{1}{6} x^3 \right)$$

$$\text{Vermutung: } y_n(x) = y_0 \sum_{k=0}^n \frac{(\alpha x)^k}{k!}$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= (Ty_n)(x) = y_0 + \alpha \int_0^x y_n(t) dt \stackrel{\text{l.A.}}{=} y_0 \left(1 + \alpha \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} \int_0^x t^k dt \right) \\ &= y_0 \left(1 + \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^{k+1}}{k!(k+1)} x^{k+1} - 0 \right) = y_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha^k}{k!} x^k \right) = y_0 \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\alpha^k}{k!} x^k \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_n(x) \longrightarrow y(x) = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{k!} = y_0 e^{\alpha x} \leftarrow \text{Lösung des AWP}$$

Übung 6.5.Ü1: WEITERE DGL/AWP

GESUCHT: $y : [0, \frac{99}{100}] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y'(x) = xy(x)$ und $y(0) = 1$.

$$\stackrel{\text{HSDI}}{\iff} y(x) = 1 + \int_0^x ty(t) dt$$

Sei also $T : C[0, \frac{99}{100}] \rightarrow C[0, \frac{99}{100}]$, $x \mapsto 1 + \int_0^x ty(t) dt$.

- $C[0, \frac{99}{100}]$ ist **vollständig** (auf kompaktem Intervall). ✓
- T ist nach HSDI **Selbstabbildung** auf $C[0, \frac{99}{100}]$. ✓
- Seien $f, g \in C[0, \frac{99}{100}]$.

$$\begin{aligned} \|T(f) - T(g)\|_\infty &= \sup_{x \in [0, \frac{99}{100}]} \left| \int_0^x tf(t) dt - \int_0^x tg(t) dt \right| \\ &\leq \sup_{x \in [0, \frac{99}{100}]} \int_0^x |t| \cdot |f(t) - g(t)| dt \\ &\leq \int_0^{\frac{99}{100}} |t| \cdot |f(t) - g(t)| dt \\ &\leq \frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100} \cdot \|f - g\|_\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow T$ ist **Kontraktion** mit $L = (\frac{99}{100})^2$. ✓

Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz hat T also einen Fixpunkt y auf $C[0, \frac{99}{100}]$.

Fixpunktiteration:

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x \underbrace{ty_0(t)}_{=1} dt = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x t \left(1 + \frac{1}{2}x^2\right) dt = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 4}x^4$$

$$\text{Vermutung: } y_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{2^k k!}$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= 1 + \int_0^x ty_n(t) dt \\ &= 1 + \int_0^x t \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k}}{2^k k!} dt \\ &= 1 + \int_0^x \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k+1}}{2^k k!} dt \\ &= 1 + \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k+2}}{\underbrace{(2k+2)k!}_{2^{k+1}k!}} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{2k}}{2^k n!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^{2k}}{2^k n!} \end{aligned}$$

Betrachte nun:

$$y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

Also ist $y(x) := \exp\frac{x^2}{2}$ die Lösung des Anfangswertproblems.

7 Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

7.1 Partielle und totale Ableitungen

VORBEMERKUNG:

- $e^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ ist ein Vektor $(0, \dots, 1, \dots, 0) = (\delta_{ij})_{i \in \underline{n}}$
- bei Vektoren: oberer Index ist Nummerierung, unterer Index ist Bezug auf Komponente.
 $e^{(2)} = (0, 1)$ in \mathbb{R}^2 , $e_0^{(2)} = 0$, $e_1^{(2)} = 1$
- Koordinatenrichtungen: x_1, \dots, x_n oder x, y, z (je nach Zusammenhang).

Definition 7.1.1: PARTIELLE DIFFERENZIERBARKEIT

Sei $x^{(0)}$ innerer Punkt von $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **partiell diffbar** in $x^{(0)}$ nach x_j ($j \in \underline{n}$), falls

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (h \in \mathbb{R})}} \frac{f(x^{(0)} + h e^{(j)}) - f(x^{(0)})}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^{(0)}) =: \partial_j f(x^{(0)})$$

existiert. Dieser heißt **partielle Ableitung** von f in $x^{(0)}$ nach x_j .

- Ist 1-dimensionale Ableitung! Alle anderen Variablen (x_i , $i \neq j$) als konstant annehmen und als 1-D-Funktion von x_j ableiten.
- Entsprechend Ableitungsregeln übertragen, soweit sinnvoll.

Beispiel 7.1.2: PARTIELLE ABLEITUNGEN

a) $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + 2x_2}{x_1}$, $x_1 \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{2x_1 x_2 - (x_1^2 + 2x_2) \cdot 1}{x_1^2}, \quad x_1 \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{2x_1 - (x_1^2 + 2x_2) \cdot 0}{x_1^2} = \frac{2}{x_1}, \quad x_1 \neq 0$$

→ Ebene (ohne x_2 -Achse) ist hier der Definitionsbereich.

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{x^2 + y^2} = y \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^2 + y^2) - xy \cdot 2y}{x^2 + y^2} = x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$(x, y) = (0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + (h, 0)) - f(x, y)}{h} \stackrel{(x, y) = (0, 0)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0 \text{ weil der Zähler } = 0 \text{ ist (ohne Limesbildung).} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \text{ analog.}$$

⇒ f auf ganz \mathbb{R}^2 partiell diffbar nach x und y .

Aber: f unstetig in $(0, 0)$: Sei $(t, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \Rightarrow f(t, t) = \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 = f(0, 0)$

Also: **partiell diffbar** $\not\Rightarrow$ **stetig**

$$(3) f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ z^2 - e^x \\ \sin y + \cos z \end{pmatrix}$$

Vektorwertige Funktionen komponentenweise ableiten (vgl. Konvergenz in \mathbb{R}^m):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ -e^x \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \cos y \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ -\sin z \end{pmatrix}$$

Definition 7.1.3: TOTALE DIFFERENZIERBARKEIT

Sei $x^{(0)}$ innerer Punkt von $U \subseteq \mathbb{R}^n$. $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **(total) diffbar** in $x^{(0)}$, falls es eine lineare Abbildung

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

gibt, sodass

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (h \in \mathbb{R}^n)}} \frac{f(x^{(0)} + h) - f(x^{(0)}) - L(h)}{|h|} = 0 \in \mathbb{R}^m$$

$h \mapsto L(h)$ heißt **totales Differential** (totale Ableitung, Fréchet-Ableitung) von f in $x^{(0)}$.

$$\text{Bezeichnung: } L(h) := df(h) = df(x^{(0)}, h) = \underbrace{f'(x^{(0)})(h)}_{\text{lin. Abb.}}$$

Definition 7.1.4: LANDAU-SYMBOL

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}^+$.

a) $f(x) = o(g(x))$ für $x \rightarrow \xi$ $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ existiert und $= 0$.

b) $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \rightarrow \xi$ $\Leftrightarrow \exists \text{const. } C \in \mathbb{R}_0^+ : \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (\mathcal{U}_\varepsilon(\xi) \cap D) \setminus \{\xi\} : \frac{|f(x)|}{g(x)} \leq C$

d.h. $f(x^{(0)} + h) - f(x^{(0)}) - f'(x^{(0)})h = o(|h|)$ für $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow f$ total diffbar in $x^{(0)}$.

Bemerkung 7.1.5:

Seien $n = m = 1$, $L(h) = ah$ ($a \in \mathbb{R}$ konstant).

Dann ist $f(x^{(0)} + h) - f(x^{(0)}) = ah + o(|h|)$ für $h \rightarrow 0$, d.h. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^{(0)} + h) - f(x^{(0)})}{h} = a + 0 \Rightarrow f'(x^{(0)}) = a$.

\Rightarrow Die totale Ableitung ist in 1-D die übliche Ableitung.

Satz 7.1.6:

a) f total diffbar in $x^{(0)} \Rightarrow f$ stetig in $x^{(0)}$.

b) Die lineare Abbildung $f'(x^{(0)})$ ist, wenn sie existiert, eindeutig gegeben.

Definition 7.1.7: JACOBI-MATRIX

Die Darstellung der linearen Abbildung

$$f': \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ in } x^{(0)}$$

bzgl. Basen in \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m als $m \times n$ -Matrix heißt **Jacobi-Matrix** $J_{f(x^{(0)})} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Ihre Determinante heißt **Jacobi-Determinante** oder **Jacobian**.

Beispiel 7.1.8:

Sei $f(x) := Ax$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$f(x^{(0)} + h) - f(x^{(0)}) = A(x^{(0)} + h) - Ax^{(0)} = Ah$$

$$f(x^{(0)} + h) - f(x^{(0)}) - Ah = 0 = o(|h|), h \rightarrow 0$$

f in ganz \mathbb{R}^n total diffbar, $f'(x^{(0)}) = A \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

Es gilt analog zu 1-D:

Seien f, g total diffbar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

$\Rightarrow f + g, \lambda f$ total diffbar und $(f + g)' = f' + g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$.

Lemma 7.1.9:

Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $0 < q < p < +\infty$.

$$\text{a) } \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q \right)^{1/q} \quad (\text{Jensen'sche Ungleichung})$$

$$\text{b) } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i| \leq |a|_{\mathbb{R}^n} \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \quad (|\cdot|_{\mathbb{R}^n} \text{ ist euklidische Norm})$$

Satz 7.1.10:

Sei $x^{(0)}$ innerer Punkt von $U \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ in U partiell diffbar nach allen Variablen.

Wenn diese partiellen Ableitungen *alle stetig* in $x^{(0)}$ sind, dann ist f in $x^{(0)}$ **total diffbar**.

Die Jacobi-Matrix (bzgl. kartesischer Koordinaten, d.h. bezüglich der Standardbasis $(e^{(j)})_j$), ist

$$f'(x^{(0)}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^{(0)}) \right)_{\substack{i \in \underline{m} \\ j \in \underline{n}}}$$

Beweis zu 7.1.10:

Sei $g(x) := f(x) - A(x - x^{(0)})$; $A := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^{(0)}) \right)_{\substack{i \in \underline{m} \\ j \in \underline{n}}}$.

Betrachte: $g(x^{(0)} + h) - g(x^{(0)})$, $h \rightarrow 0$ in \mathbb{R}^n , d.h. $(h_1, \dots, h_n) \rightarrow (0, \dots, 0)$ (jede Komponente für sich konvergiert unabhängig gegen 0).

z.z.: $g(x^{(0)} + h) - g(x^{(0)}) - g(x^{(0)}) = f(x^{(0)} + h) - f(x^{(0)}) - Ah = o(|h|)$, $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} g(x^{(0)} + h) - g(x^{(0)}) &= g(x_1^{(0)} + h_1, x_2^{(0)} + h_2, \dots, x_n^{(0)} + h_n) - g(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \\ &= g(x_1^{(0)} + h_1, x_2^{(0)} + h_2, \dots, x_n^{(0)} + h_n) - g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} + h_2, \dots, x_n^{(0)} + h_n) \\ &\quad + g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} + h_2, \dots, x_n^{(0)} + h_n) - g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)} + h_3, \dots, x_n^{(0)} + h_n) \\ &\quad + g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)} + h_3, \dots, x_n^{(0)} + h_n) + \dots - \dots \\ &\quad \dots \\ &\quad + g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)} + h_n) - g(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \end{aligned} \quad (*)$$

$\frac{\partial g}{\partial x_i}$ stetig in $x^{(0)} \Rightarrow$ zu einem $\varepsilon > 0$ exist. $\delta_i > 0$: $\underbrace{\left| \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \right|}_{(*)} < \frac{\varepsilon}{n}$ für $x \in \mathcal{U}_{\delta_i}(x^{(0)})$

(#) $\stackrel{!}{=} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) \right|$, denn:

$$\begin{aligned} A(x - x^{(0)}) &= \left(\sum_{l=1}^n A_{k,l} (x_l - x_l^{(0)}) \right)_{k \in \underline{m}} \\ \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) - \left(\sum_{l=1}^n A_{k,l} \delta_{li} \right)_{k \in \underline{m}} &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - (A_{k,i})_{k \in \underline{m}} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^{(0)}) \right)_{k \in \underline{m}} \\ \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i}(x^{(0)}) &= 0 \end{aligned}$$

$\delta := \min(\delta_1, \dots, \delta_m) > 0$

Sei $|h| < \delta$, d.h. $x^{(0)} + h \in \mathcal{U}_\delta(x^{(0)})$

Terme in (*):

$$\begin{aligned} &g(x_1^{(0)}, \dots, x_{j-1}^{(0)}, x_j^{(0)} + h_j, \dots, x_n^{(0)} + h_n) - g(x_1^{(0)}, \dots, x_{j-1}^{(0)}, x_j^{(0)}, x_{j+1}^{(0)} + h_{j+1}, \dots, x_n^{(0)} + h_n) \\ \Rightarrow \exists \xi_j \text{ sodass:} &= h_j \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1^{(0)}, \dots, x_{j-1}^{(0)}, \xi_j, x_{j+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \quad (**) \end{aligned}$$

Sieht ein bisschen nach Mittelwertsatz aus!

Nach 1-D-MWS-DIFF:

$$\left| \xi_j - x_j^{(0)} \right| < |h_j|$$

also: $|(**)| \leq |h_j| \cdot \frac{\varepsilon}{h}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |(*)| &\leq \frac{\varepsilon}{m} \cdot \sum_{j=1}^n |h_j| \stackrel{7.1.9.b)}{\leq} \varepsilon \left(\sum_{j=1}^n |h_j| \right)^{1/2} = \varepsilon \cdot |h|_{\mathbb{R}^n} \\ \Rightarrow \frac{|g(x^{(0)} + h) - g(x^{(0)})|}{|h|} &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Setze $\varepsilon := \frac{1}{k}$, $k \rightarrow \infty$.

$$\Rightarrow g(x^{(0)} + h) - g(x^{(0)}) = o(|h|) \text{ für } h \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f \text{ in } x^{(0)} \text{ total diffbar mit totalem Differential } A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^{(0)}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^{(0)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^{(0)}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^{(0)}) \end{pmatrix}$$

□

Beispiel 7.1.11:

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 y^2 \\ 2x - 4 \\ x e^y \end{pmatrix} \Rightarrow f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 & 2yx^2 \\ 2 & -1 \\ e^y & x e^y \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f überall partiell diffbar, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

f nicht total diffbar in $(0, 0)$, da f unstetig in $(0, 0)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ unstetig in $(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cdot \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{y^3}{yx} \begin{cases} \rightarrow +\infty & (y \rightarrow 0^+) \\ \rightarrow -\infty & (y \rightarrow 0^-) \end{cases}$$

\Rightarrow Stetigkeitsbedingung in 7.1.10 kann nicht weggelassen werden.

Definition 7.1.12: GRADIENT

Im Fall $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, f diffbar in $x^{(0)} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

$$f'(x^{(0)}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^{(0)}) \right) =: \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) (x^{(0)}) =: \text{grad } f(x^{(0)})$$

Gradient von f .

Definition 7.1.13: NABLA- UND VERWANDTE OPERATOREN

a) **Vektorprodukt/Kreuzprodukt** (nur im \mathbb{R}^3):

$$\text{Für } a, b \in \mathbb{R}^3 \text{ sei } a \times b := a \wedge b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

b) **Nabla-Operator:** $\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

- Für $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, ist also $\text{grad } g = (\nabla g)^T$.
- Für diffbares $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, (gleiches n) sei

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f_i =: \nabla \cdot f =: \text{div } f$$

die **Divergenz** der Funktion.

- Für diffbares $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, sei

$$\text{rot } f := \nabla \times f := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} f_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \end{pmatrix} =: \text{curl } f$$

die **Rotation** von f .

- Für zweimal diffbares $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sei

$$\Delta g := \nabla \cdot \nabla g = \text{div}(\text{grad } g)^T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} g$$

wobei Δ **Laplace-Operator** genannt wird.

Funktionen mit $\Delta g = 0$ (Laplace-Gleichung) heißen **harmonisch**.

- Für diffbares $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, in $x^{(0)}$ gilt:

$$f'(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(x^{(0)}) \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(x^{(0)}) \end{pmatrix} = (\nabla f_1(x^{(0)}), \dots, \nabla f_m(x^{(0)}))^T$$

Beispiel 7.1.14:a) **MAXWELL-GLEICHUNGEN** (Elektromagnetische Effekte)

$\operatorname{div} D = \rho$ \rightsquigarrow Quelle des el. Feldes (D) sind die Ladungen ρ (Ladungsdichte)

$\operatorname{rot} E = -\dot{B}$ ($\dot{B} = \frac{\partial}{\partial t} B$, Ableitung nach der Zeit)

\rightsquigarrow zeitlich veränderliche Magnetfelder (B) erzeugen el. Felder (E) (Wirbelfelder, deren geschlossene Feldlinien die Änderungsrichtung des Magnetfelds umkreisen) \rightarrow Dynamo, Generator

$\operatorname{div} B = 0$ \rightsquigarrow Es gibt keine magnetischen Monopole.

$\operatorname{rot} H = j$ \rightsquigarrow Ströme (j) erzeugen Magnetfelder (H) (deren geschlossene Feldlinien die Ströme umkreisen)

(div und rot hier nur bzgl. Ortskoordinaten x, y, z , nicht Zeit t)

b) **CAUCHY-NAVIER-GLEICHUNG** (Elastodynamik, z.B. Erdbeben) (vgl. NAVIER-STOKES-Gleichung)

$$\alpha^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \beta^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$: Verschiebung
Ort Zeit

α : Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen (Druckwellen)

β : Ausbreitungsgeschwindigkeit von Scherwellen

t : Zeit

c) $f(x, y, z) := ye^x + x \sin z$

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = (ye^x + \sin z, e^x, x \cos z) \text{ bzw. } \nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} ye^x + \sin z \\ e^x \\ x \cdot \cos z \end{pmatrix}$$

$$\Delta f(x, y, z) = \operatorname{div} \nabla f(x, y, z) = ye^x + 0 + (-x \sin z) = ye^x - x \sin z$$

$$d) g(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^2 + y \\ xy \\ e^x \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} g(x, y, z) = 2x + x + 0 = 3x$$

$$g'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 \\ y & x & 0 \\ e^x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} g(x, y, z) = \operatorname{Spur} g'(x, y, z)$$

$$\operatorname{rot} g(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} g_3 - \frac{\partial}{\partial z} g_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} g_1 - \frac{\partial}{\partial x} g_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} g_2 - \frac{\partial}{\partial y} g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - e^x \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^x \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

Definition 7.1.15: RICHTUNGSABLEITUNG

Sei $x^{(0)}$ innerer Punkt von $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

f besitzt in $x^{(0)}$ eine **Richtungsableitung** in Richtung $v \in \mathcal{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$, falls

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x^{(0)} + hv) - f(x^{(0)})}{h} =: \frac{\partial f}{\partial v}(x^{(0)})$$

existiert.

vgl. normale partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ mit Richtungsableitung in Richtung $e^{(j)}$.

Übung 7.1.Ü1: GEGENBEISPIEL RICHTUNGSABLEITUNGEN UND TOTALE DIFFBARKEIT

$$\text{Sei } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f hat Richtungsableitungen in jede Richtung $v \in \mathcal{S}^1$, ist aber nicht total diffbar.

Beweis:

Sei $v \in \mathcal{S}^1$ beliebig. Betrachte

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) &:= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f((0, 0) + hv) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (f(hv_1, hv_2) - f(0, 0)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left(\frac{hv_1(hv_2)^2}{(hv_1)^2 + (hv_2)^4} - 0 \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^3 v_1 v_2^2}{h^2 (v_1^2 + h^2 v_2^4)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + h^2 v_2^4} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \begin{cases} \frac{0 \cdot v_2^2}{h^2 v_2^4} & v_1 = 0 \\ \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + h^2 v_2^4} & v_1 \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & v_1 = 0 \\ \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2} & v_1 \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & v_1 = 0 \\ \frac{v_2^2}{v_1} & v_1 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Damit existiert die Richtungsableitung für jedes v .

Betrachte nun den Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h^2, h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 h^2}{(h^2)^2 + h^4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^4}{2h^4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$$

obwohl $\lim_{h \rightarrow 0} \begin{pmatrix} h^2 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in \mathbb{R}^2 . Damit ist f in $(0, 0)$ nicht stetig.

Damit kann f nicht total differenzierbar sein (7.1.6). □

7.2 Höhere Ableitungen

entsprechend 1-D (falls Grenzwert existiert):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (x^{(0)}) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i} (x^{(0)} + h e^{(j)}) - \frac{\partial f}{\partial x_i} (x^{(0)})}{h} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (x^{(0)}) := f_{x_i x_j} (x^{(0)})$$

Achtung Reihenfolge! In allen Schreibweisen: „Das, was näher an f dran ist, zuerst.“

D.h.: bei letzterem andersrum als bei Bruchschreibweise.

Definition 7.2.1: GEBIET

$G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt...

a) **zusammenhängend** (*connected*), falls gilt:

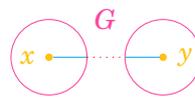
Zu je zwei Punkten $x, y \in G$ existieren endlich viele Punkte $x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \in G$ derart, dass die Verbindungsstrecken $xx^{(1)}, x^{(1)}x^{(2)}, \dots, x^{(m-1)}x^{(m)}, x^{(m)}y$ in G enthalten sind.

Dabei ist $\overline{ab} := \{a + \lambda(b - a) \mid \lambda \in]0, 1[\}$ für $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Man sagt auch, der **Polygonzug** $\overline{xx^{(1)} \dots x^{(m)}y}$ liegt in G .



zusammenhängend



nicht zusammenhängend

b) **Gebiet** (*region*), falls G offen und zusammenhängend ist.

Definition 7.2.2: RÄUME STETIG PARTIELL DIFFBARER FUNKTIONEN

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir betrachten Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$.

$C^{(1)}(G, \mathbb{R}^m)$: Raum aller auf G (nach allen Variablen) stetig partiell diffbaren Funktionen mit Werten in \mathbb{R}^m .

$C^{(k)}(G, \mathbb{R}^m)$: Raum aller auf G (nach allen Variablen) k -mal stetig partiell diffbaren Funktionen mit Werten in \mathbb{R}^m .

$C^{(k)}(G) := C^{(k)}(G, \mathbb{R}^1)$ (skalare Funktionen)

Satz 7.2.3: SATZ VON SCHWARZ

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $U \subseteq G$ offen, $f \in C^{(1)}(G, \mathbb{R}^m)$, $x^{(0)} \in U$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existieren und sind stetig in $x^{(0)}$.

Dann ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x^{(0)}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (x^{(0)})$. (Vertauschbarkeit gemischter Ableitungen)

Beweis zu 7.2.3:

o.B.d.A. $m = 1$ (sonst komponentenweise).

Andere Variablen als konstant annehmen, also o.B.d.A. $n = 2$, $x_1 =: x$, $x_2 =: y$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existieren in U und sind stetig in $x^{(0)} =: (\xi, \eta)$.

$$\text{z.Z. } f_{xy}(\xi, \eta) = f_{yx}(\xi, \eta)$$

Zunächst seien $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ fest und nahe $(0, 0)$.

Seien $g(x) := f(x, \eta + s) - f(x, \eta)$, $h(y) := f(\xi + t, y) - f(\xi, y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\implies g'(x) = f_x(x, \eta + s) - f_x(x, \eta), \quad h'(y) = f_y(\xi + t, y) - f_y(\xi, y)$$

MWS DIFF: $\exists \vartheta_1, \vartheta_2 \in]0, 1[$ (eigentlich $\vartheta_2(y)$)

$$g'(x) = s \cdot (f_x)_y(x, \eta + \vartheta_1 s) \tag{I}$$

$$h'(x) = t \cdot (f_y)_x(\xi + \vartheta_2 t, y) \tag{II}$$

$$\left(\underbrace{(\eta+s) - \eta}_b = s, \tau = \eta + \vartheta_1 s \in]\eta, \eta+s[, \frac{k(b) - k(a)}{b-a} = k'(\tau) \Leftrightarrow \vartheta_1 \in]0, 1[; k' = (f_x)_y(x, \cdot) \right. \\ \left. \Rightarrow k(y) := f_x(x, y), \tilde{k}(x) := f_y(x, y) \right)$$

Somit gilt auch:

$$g(\xi+t) - g(\xi) = f(\xi+t, \eta+s) - f(\xi+t, \eta) - f(\xi, \eta+s) + f(\xi, \eta) = h(\eta+s) - h(\eta) \quad (\text{III})$$

Nach dem MWS DIFF. gilt: $\exists \vartheta_3, \vartheta_4 \in]0, 1[$:

$$g(\xi+t) - g(\xi) = t \cdot g'(\xi + \vartheta_3 t) \stackrel{!}{=} ts (f_x)_y(\xi + \vartheta_3 t, \eta + \vartheta_1 s) \quad (\text{IV})$$

$$h(\eta+s) - h(\eta) = s \cdot h'(\eta + \vartheta_4 s) \stackrel{!}{=} st (f_y)_x(\xi + \vartheta_2 t, \eta + \vartheta_4 s) \quad (\text{V})$$

Durch Vergleichen von IV und V erhalten wir:

$$(f_x)_y(\xi + \vartheta_3 t, \eta + \vartheta_1 s) = (f_y)_x(\xi + \vartheta_2 t, \eta + \vartheta_4 s)$$



Mit $(t, s) \rightarrow (0, 0)$ (beachte: f_{xy} und f_{yx} stetig in (ξ, η)):

$$f_{xy}(\xi, \eta) = f_{yx}(\xi, \eta)$$

□

Satz 7.2.4: SATZ VON SCHWARZ II

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $U \subseteq G$ offen, $x^{(0)} \in U$, $f \in C^{(1)}(G, \mathbb{R}^m)$ und es existiere $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ in U , stetig in $x^{(0)}$.

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \text{ existiert in } x^{(0)} \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^{(0)})$$

(Verallgemeinerung von 7.2.3)

Beweis zu 7.2.4:

weggelassen („deutlich ekliger als 7.2.3“, aber 7.2.4 deutlich praktischer!) □

Also gilt: In $C^{(k)}(G, \mathbb{R}^m)$ sind die gemischten Ableitungen bis einschließlich Ordnung k unabhängig von der Reihenfolge der Bildung.

$$\frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3} = \partial_1 (\partial_2^2 (\partial_3 f)) = \partial_2 (\partial_3 (\partial_2 (\partial_1 f))) = \dots$$

Beispiel 7.2.5:

Die Stetigkeitsvoraussetzung an die 2. Ableitung kann nicht entfallen:

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x, y) &= \left(\frac{y^3(x^2+y^2) - xy^3 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x \cdot 3y^2(x^2+y^2) - xy^3 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \right) \\ &= \left(\frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \right); (x, y) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

$$\text{in } (0, 0): \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - 0}{h} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - 0}{h} = 0$$

$\Rightarrow f$ überall diffbar,

- auf y -Achse: $f_x(0, y) = \frac{y^3(y^2-0)}{(0+y^2)^2} = y$
- auf x -Achse: $f_y(x, 0) = 0$

auch für $x = y = 0$.

$$\Rightarrow f_{xy}(0, y) = 1, f_{yx}(x, 0) = 0 \quad \forall y, x$$

$$\Rightarrow f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$$

Sind die Voraussetzungen vom Satz von Schwarz nicht erfüllt?

$$f_x(x, y) = \frac{y^5 - y^3 x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{(5y^4 - 3y^2 x^2)(x^2 + y^2)^2 - y^3(y^2 - x^2)2(x^2 + y^2)2y}{(x^2 + y^2)^4}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\Rightarrow (\text{für } x \neq 0) f_{xy}(x, 0) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} f_{xy}(0, 0) = 1 \quad \text{nicht stetig!}$$

Definition 7.2.6: HESSEMATRIX

$f: G \rightarrow \mathbb{R}$ besitze *alle* (d.h. auch die gemischten) partiellen Ableitungen 2. Ordnung.

Dann heißt

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & \cdots & f_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & \cdots & f_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Hessematrix (Hessian) von f in $x \in G$.

Achtung: *Jacobian* = Jacobi-Determinante, *Hessian* = Hesse-Matrix

Für $f \in C^{(2)}(G)$ ist $H_f(x)$ eine symmetrische Matrix (d.h. $H_f(x)^T = H_f(x)$) wegen Satz von Schwarz.

7.3 Zentrale Sätze

Satz 7.3.1: KETTENREGEL

Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \supseteq V \rightarrow \mathbb{R}^p$, $f(U) \subseteq V$ und f in $\xi \in \overset{\circ}{U}$, g in $\eta := f(\xi) \in \overset{\circ}{V}$ diffbar.
 $\Rightarrow h := g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($x \mapsto g(f(x))$) in ξ diffbar und

$$h'(\xi) = g'(f(\xi))f'(\xi)$$

Multiplikation von Jacobi-Matrizen

$$p \times n = p \times m \cdot m \times n$$

somit gilt für die (i, j) -te Komponente von $h'(\xi)$:

$$(h'(\xi))_{i,j} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\xi) = \sum_{k=1}^m (g'(\eta))_{i,k} \cdot (f'(\xi))_{k,j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(\eta) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\xi)$$

Beweis zu 7.3.1:

$A := f'(\xi)$ $m \times n$, $B := g'(\eta)$ $p \times m$ ($\eta := f(\xi)$).

Mit der Definition der totalen Ableitung gilt also:

$$f(\xi + k) = f(\xi) + Ak + o(|k|), \quad k \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$g(\eta + l) = g(\eta) + Bl + o(|l|), \quad l \rightarrow 0 \quad (2)$$

Somit ist z.z.: $\underbrace{h}_{=g \circ f}(\xi + k) = h(\xi) + \underbrace{B}_{g'(f(\xi))} \cdot \underbrace{A}_{=f'(\xi)} \cdot k + o(|k|), \quad k \rightarrow 0$

a) Es gilt:

$$h(\xi + k) = g(f(\xi + k)) \stackrel{(1)}{=} g(\underbrace{f(\xi)}_{=\eta} + \underbrace{Ak + o(|k|)}_{=l}) \stackrel{(2)}{=} g(\eta) + B(Ak + o(|k|) + o(|l|)), \quad l \rightarrow 0$$

b) Was ist mit $B \cdot o(|k|)$?

$o(|k|)$ steht für eine Funktion $r(k)$ mit $\frac{r(k)}{|k|} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$.

$$\frac{Br(k)}{|k|} = \frac{1}{|k|} \left(\sum_{j=1}^m B_{i,j} r_j(k) \right)_{i \in \underline{p}}$$

Analog zu Übungsaufgabe 6.1.Ü2 kann man zeigen (**Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung**):

$$\left| \sum_{j=1}^m c_j d_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^m c_k j^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^m d_j^2 \right)^{1/2}$$

Halte nun i fest:

$$\left| \sum_{j=1}^m B_{i,j} r_j(k) \right| = |B_{i,-} \cdot r(k)| \leq |B_{i,-}|_{\mathbb{R}^m} \cdot |r(k)|_{\mathbb{R}^m}$$

$$\Rightarrow \frac{|B \cdot r(k)|_{\mathbb{R}^p}}{|k|_{\mathbb{R}^n}} \leq \text{const.} \cdot \frac{|r(k)|_{\mathbb{R}^m}}{|k|_{\mathbb{R}^n}} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$$

also $B \cdot o(|k|) = o(|k|)$, $k \rightarrow 0$.

c) $o(|l|) = o(|Ak + o(|k|)|)$; $o(|l|)$ ist eine Funktion $s(l)$ mit $\frac{s(l)}{|l|} \xrightarrow{l \rightarrow 0} 0$.

Zu untersuchen: $o(|l|)$ für $k \rightarrow 0$; $l = Ak + r(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$ (da $k \mapsto Ak$ stetig und linear und $r(k) \frac{1}{|k|} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$).

$$\begin{aligned} \frac{s(Ak + r(k))}{|k|} &= \underbrace{\frac{|Ak + r(k)|}{|k|}}_{=|l|} \cdot \underbrace{\frac{s(Ak + r(k))}{|Ak + r(k)|}}_{\xrightarrow{k \rightarrow 0} 0} \xrightarrow{(\Rightarrow l \rightarrow 0)} 0 \\ &= \left| A \underbrace{\frac{k}{|k|}}_{\text{beschr.}} + \underbrace{\frac{r(k)}{|k|}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} \right| \end{aligned}$$

d) Also gilt:

$$h(\xi + k) = g(\eta) + BAk + Bo(|k|) + o(|Ak + o(|k|)|) = h(\xi) + g'(\eta) \cdot f'(\xi)k + o(|k|), \quad k \rightarrow 0$$

$\Rightarrow h$ diffbar in ξ und $h'(\xi) = g'(\eta) f'(\xi)$.

□

Korollar 7.3.2:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $g \in C^{(1)}(G, \mathbb{R}^1)$, $x^{(0)} \in G$, $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$.

Dann existiert die Richtungsableitung von g in $x^{(0)}$ in Richtung v und

$$\frac{\partial g}{\partial v}(x^{(0)}) = (\text{grad } g(x^{(0)})) \cdot v$$

(euklidisches Skalarprodukt)

Beweis zu 7.3.2:

Sei $f(t) := x^{(0)} + t \cdot v$, $t \in \mathbb{R}$ hinreichend klein, sodass $f(t) \in G$.

$f'(t) = v \quad \forall t$, $f(0) = x^{(0)}$

$(g \circ f)(t) = g(f(t)) = g(x^{(0)} + tv)$; $g \circ f: \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ (1-D-Funktion).

Sei $D := \mathcal{U}_\varepsilon(0)$.

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(h) - (g \circ f)(0)}{h} \quad (1\text{-D-Funktion}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x^{(0)} + hv) - g(x^{(0)})}{h} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial g}{\partial v}(x^{(0)}) \quad (\text{mehr-D-Funktion}) \end{aligned}$$

Nach Kettenregel: $(g \circ f)'(0) = \underbrace{g'(f(0))}_{=\text{grad } g(x^{(0)})} \cdot \underbrace{f'(0)}_{=v}$

□

Bemerkung 7.3.3:

Sei $a, b \in \mathbb{R}^n$. $\Rightarrow a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \angle(a, b)$, d.h. $a \cdot b \leq |a| |b|$, also:

$$\frac{\partial g}{\partial v}(x^{(0)}) \leq |\text{grad } g(x^{(0)})|$$

und

$$\frac{\partial g}{\partial v}(x^{(0)}) = |\text{grad } g(x^{(0)})| \Leftrightarrow v \uparrow \text{grad } g(x^{(0)}) \Leftrightarrow v = \frac{\text{grad } g(x^{(0)})}{|\text{grad } g(x^{(0)})|} \quad \text{wenn } \text{grad } g(x^{(0)}) \neq 0$$

d.h. $\text{grad } g(x^{(0)})$ ist in $x^{(0)}$ die **Richtung des steilsten Anstiegs** der Höhenlinien von g .

Beispiel 7.3.4: POLARKOORDINATEN

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi; \quad r \in \mathbb{R}_0^+, \quad \varphi \in [0, 2\pi[$$

$$f(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$g(x, y) = e^{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(r, \varphi) = g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = e^{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = e^{r^2}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)'(r, \varphi) = \left(\frac{\partial (g \circ f)}{\partial r}(r, \varphi), \frac{\partial (g \circ f)}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right) = (2re^{r^2}, 0)$$

Kettenregel:

$$g'(x, y) = (2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2})$$

$$(g \circ f)'(r, \varphi) = g'(f(r, \varphi)) \cdot f'(r, \varphi)$$

$$= (2r \cos(\varphi) e^{r^2}, 2r \sin(\varphi) e^{r^2}) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$= (2r \cos^2(\varphi) e^{r^2} + 2r \sin^2(\varphi) e^{r^2}, -2r^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) e^{r^2} + 2r^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) e^{r^2})$$

$$= (2re^{r^2}, 0)$$

Satz 7.3.5:

Seien $F \in C^{(2)}(G, \mathbb{R})$, $f \in C^{(2)}(G, \mathbb{R}^3)$, $G \subseteq \mathbb{R}^3$ Gebiet. Dann gilt:

- $\text{rot}(\text{grad } F)^T = 0$
- $\text{div}(\text{rot } f) = 0$
- $\Delta f = (\text{grad } \text{div } f)^T - \text{rot}(\text{rot } f)$
(Δ ist komponentenweise zu verstehen)

Beweis zu 7.3.5:

$$\text{a) } \text{grad } F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rot}(\text{grad } F)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_1} \end{pmatrix} \stackrel{\text{Schwarz}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

Definition 7.3.6: (MEHRDIMENSIONALE) STAMMFUNKTION

Seien $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet.

f besitzt eine **Stammfunktion** oder **Potenzial** $F : G \rightarrow \mathbb{R}$, falls $f = \nabla F$ auf G .

f heißt dann **Gradientenfeld**.

Korollar 7.3.7: INTEGRABILITÄTSBEDINGUNG

Sei $f \in C^{(1)}(G, \mathbb{R}^3)$ Gradientenfeld, $G \subseteq \mathbb{R}^3$ Gebiet.

$$\Rightarrow \text{rot } f = 0 \text{ in } G$$

Die Umkehrung gilt i.A. nicht!

Übung 7.3.Ü1: GEGENBEISPIEL ZUR UMKEHRUNG DER INTEGRABILITÄTSBEDINGUNG VON GRADIENTENFELDERN

$$\text{Sei } f(x, y, z) := \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\text{rot } f = 0$, aber f ist kein Gradientenfeld.

Beweis:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial}{\partial x} f_1 &= -y \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x^2+y^2} = -y \cdot 2x(-1) \frac{1}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \bullet \frac{\partial}{\partial y} f_1 &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(y \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \right) = -\left(1 \cdot \frac{1}{x^2+y^2} + y \cdot 2y(-1) \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \right) = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \bullet \frac{\partial}{\partial x} f_2 &= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial}{\partial y} f_1 \\ \bullet \frac{\partial}{\partial y} f_2 &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial}{\partial x} f_1 \\ \bullet \frac{\partial}{\partial z} f_1 &= \frac{\partial}{\partial z} f_2 = 0 \\ \bullet \frac{\partial}{\partial x} f_3 &= \frac{\partial}{\partial y} f_3 = \frac{\partial}{\partial z} f_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{rot } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} f_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \left(-\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Als potenzielle Stammfunktionen kämen hier nur $\arctan \frac{y}{x}$ oder $\arctan \frac{x}{y}$ infrage, welche aber auf jeweils einer Koordinatenachse nicht definiert sind und auch nicht stetig fortsetzbar sind. Damit existiert keine „komplette“ Stammfunktion für f , diese ist also kein Gradientenfeld. \square

Satz 7.3.8: MWS DIFF (MEHRDIMENSIONAL)

Sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $a, b \in G$, sodass $\overline{ab} \subset G$ (wobei $\overline{ab} := \{a + \lambda(b-a) \mid \lambda \in]0, 1[\}$).
Dann gilt:

$$\exists \xi \in \overline{ab} : f(b) - f(a) = (\text{grad } f(\xi)) \cdot (b - a)$$

Beweis zu 7.3.8:

1-D-MWS DIFF:

$$g(t) := f(a + t(b-a)) \text{ auf } [0, 1]$$

„Parametrisierung der Strecke“: g ist stetig auf $[0, 1]$, diffbar auf $]0, 1[$, also:

$$\exists \tau \in]0, 1[: \underbrace{\text{grad } f(a + \tau(b-a))}_{=: \xi} \cdot (b-a) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} g'(\tau) = \frac{g(1) - g(0)}{1-0} = f(b) - f(a)$$

\square

Satz 7.3.9: SATZ VON TAYLOR (MEHRDIMENSIONAL)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{(r+1)}(G, \mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, $\xi, \xi + h \in G$, sodass $\overline{\xi(\xi + h)} \subseteq G$.

$$\Rightarrow f(\xi + h) = f(\xi) + \sum_{k=1}^r \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k}} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f(\xi) \cdot \frac{h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} + R_r$$

Restglieddarstellung:

a) nach Lagrange:

$$\exists \vartheta \in]0, 1[, \text{ sodass } R_r = \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = r+1}} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f(\xi + \vartheta h) \cdot \frac{h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$$

b) in Integralform:

$$R_r = \int_0^1 \frac{(1-t)^r}{r!} \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = r+1}} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f(\xi + th) h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n} dt$$

Definition ergänzend zu 7.3.9: MULTIINDIZES

$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ heißt bei der Verwendung in Summen/Produkten **Multiindex**, und es ist:

$$h^\alpha := \prod_{i=1}^n h_i^{\alpha_i} = h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n} \text{ für } h \in \mathbb{R}^n$$

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

$$\alpha! := \prod_{i=1}^n \alpha_i! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

$$D^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \text{ (Differentialoperator)}$$

Satz 7.3.9': SATZ VON TAYLOR (MIT MULTIINDIZES)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{(r+1)}(G, \mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, $\xi, \xi + h \in G$, sodass $\overline{\xi(\xi + h)} \subseteq G$.

$$\Rightarrow f(\xi + h) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq r}} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi) h^\alpha + R_r$$

$$R_r = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi + \vartheta h) h^\alpha = \int_0^1 \frac{(1-t)^r}{r!} \sum_{|\alpha|=r+1} D^\alpha f(\xi + th) h^\alpha dt$$

für ein geeignetes $\vartheta \in]0, 1[$.

Beweis zu 7.3.9:

(Skizze)

Sei $F: \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(\xi + th)$.

$$f(\xi + h) - f(\xi) = F(1) - F(0) \stackrel{1\text{-D-Taylor}}{=} \frac{F'(0)}{1!} \cdot 1 + \frac{F''(0)}{2!} \cdot 1^2 + \cdots + \frac{F^{(r)}(0)}{r!} 1^r + R_r$$

$$F'(0) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \text{grad } f(\xi + 0 \cdot h) \cdot h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) h_i$$

$$\begin{aligned}
F''(t) &= \frac{d}{dt} F'(t) = \frac{d}{dt} (\text{grad } f(\xi + th) \cdot h) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi + th) \cdot h_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\text{grad } \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi + th) \right) \cdot h \cdot h_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi + th) \cdot h_j h_i = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)}_{\left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2} f(\xi + th) \\
&= h^T \cdot H_f(\xi + th) \cdot h
\end{aligned}$$

Allgemein (induktiv):

$$F^{(k)}(t) = \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(\xi + th) = k! \sum_{|\alpha|=k} \frac{h^\alpha D^\alpha}{\alpha!} f(\xi + th)$$

z.B. $n = 2, r = 2$:

$$\begin{aligned}
f(\xi + h) &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^2 \\ |\alpha| \leq 2}} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi) h^\alpha + R_r \\
&= \frac{1}{(0,0)!} \cdot D^{(0,0)} f(\xi) h^{(0,0)} + \frac{1}{(1,0)!} \cdot D^{(1,0)} f(\xi) h^{(1,0)} + \frac{1}{(0,1)!} \cdot D^{(0,1)} f(\xi) h^{(0,1)} \\
&\quad + \frac{1}{(1,1)!} \cdot D^{(1,1)} f(\xi) h^{(1,1)} + \frac{1}{(2,0)!} \cdot D^{(2,0)} f(\xi) h^{(2,0)} + \frac{1}{(0,2)!} \cdot D^{(0,2)} f(\xi) h^{(0,2)} \\
&= f(\xi) + \frac{1}{1! \cdot 0!} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi) h_1^1 h_2^0 + \frac{1}{0! \cdot 1!} \frac{\partial}{\partial x_2} f(\xi) h_1^0 h_2^1 \\
&\quad + \frac{1}{1! \cdot 1!} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(\xi) h_1^1 h_2^1 + \frac{1}{2! \cdot 0!} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(\xi) h_1^2 h_2^0 + \frac{1}{0! \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(\xi) h_1^0 h_2^2 \\
&= f(\xi) + \text{grad } f(\xi) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f h + R_2
\end{aligned}$$

□

Übung 7.3.Ü2: MULTINOMIALSATZ

Sei $h \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^n h_i \right)^k = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=k}} \frac{k!}{\alpha!} h^\alpha$$

Beweis:

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \left(\sum_{i=1}^n h_i \right)^k$, $\xi := 0 \in \mathbb{R}^n$.

Als Kombination stetig diffbarer Funktionen ist f ebenfalls stetig diffbar. Nach dem Satz von Taylor gilt:

$$f(\xi + h) = f(h) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq r}} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi) h^\alpha + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=r+1}} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi + \vartheta h) h^\alpha$$

mit $\vartheta \in]0, 1[$ gemäß der Restgliedformel von Lagrange.

$$\Rightarrow f(h) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq r}} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0) h^\alpha + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=r+1}} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\vartheta h) h^\alpha$$

Dabei gilt für $|\alpha| = l < k$, $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
D^\alpha f(x) &= \frac{\partial^l}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x) = l! \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^{k-l} \\
\Rightarrow D^\alpha f(0) &= 0
\end{aligned}$$

nach den typischen Ableitungsregeln für Polynome + Kettenregel, und für $|\alpha| = k$:

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x) = k! \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^{k-k} = k! \cdot 1 = k! \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ (daher ist } \vartheta \text{ egal!)}$$

$$\Rightarrow f(h) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| < k}} \frac{1}{\alpha!} 0 \cdot h^\alpha + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = k}} \frac{1}{\alpha!} k! \cdot h^\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n h_i \right)^k = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = k}} \frac{k!}{\alpha!} h^\alpha$$

Ein alternativer Beweis geht auch über Induktion. □

Satz 7.3.10: EXTREMA OHNE NEBENBEDINGUNG

a) **Fermat'sches Kriterium** für lokale Extrema:

Sei $f \in C^{(1)}(G)$ (also: $f : G \rightarrow \mathbb{R}^1$).

Damit f in $x^{(0)} \in G$ ein lokales Minimum oder lokales Maximum besitzt, ist *notwendig*:

$$\text{grad } f(x^{(0)}) = 0 \Leftrightarrow x^{(0)} \text{ stationärer/kritischer Punkt von } f$$

$= f'(x^{(0)})$

b) Seien $f \in C^{(2)}(G)$, $\text{grad } f(x^{(0)}) = 0$.

Hinreichend für ein strenges lokales

Minimum
Maximum

 von f in $x^{(0)} \in G$ ist, dass die Hesse-Matrix

$H_f(x^{(0)})$ von f in $x^{(0)}$

positiv
negativ

 definit ist.

Es liegt kein lokales Minimum/Maximum vor, falls $H_f(x^{(0)})$ indefinit ist.

Ist $H_f(x^{(0)})$ semidefinit, so ist keine allgemeine Aussage über Extrema in $x^{(0)}$ möglich.

Aus reeller linearer Algebra: DEFINITHEIT EINER MATRIX

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix.

- A heißt **positiv semidefinit** $:\Leftrightarrow x^T A x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- A heißt **positiv definit** $:\Leftrightarrow A$ positiv semidefinit und $x^T A x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- A heißt **negativ definit** $:\Leftrightarrow -A$ positiv definit.
- A heißt **indefinit** $:\Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R}^n : x^T A x > 0, y^T A y < 0$

A ist positiv semidefinit \Leftrightarrow alle Eigenwerte von A sind ≥ 0 (d.h. in \mathbb{R}_0^+)

\Leftrightarrow alle Hauptminoren sind ≥ 0 (d.h. in \mathbb{R}_0^+)

A ist positiv definit \Leftrightarrow alle Eigenwerte von A sind > 0 (d.h. in \mathbb{R}^+)

\Leftrightarrow alle Hauptminoren sind > 0 (d.h. in \mathbb{R}^+)

Achtung! Alle Hauptminoren $< 0 \not\Leftrightarrow A$ negativ definit!

Die **Minoren** von A sind die Determinanten der quadratischen Teilmatrizen von A .

Die **Hauptminoren** sind die Determinanten der quadratischen Teilmatrizen von A , die durch Streichen der letzten Zeile(n) und letzten Spalte(n) von A entstehen,

d.h. die k -te Hauptminore ist $H_k := \det \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k,1} & \dots & A_{k,k} \end{pmatrix}$ für $k \in \underline{n}$.

Bsp.: Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Dann sind die Hauptminoren: $H_1 := \det(1)$, $H_2 := \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $H_3 := \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Beweis zu 7.3.10:

a) Sei $g(t) := f(t, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. $\Rightarrow g$ ist 1-D-Funktion und hat lokales Extremum bei $t = x_1^{(0)}$.

$\Rightarrow g'(x_1^{(0)}) = 0$ per Def.

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = 0$$

Analog: $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = 0 \quad \forall k \in \underline{n}$

b) Taylor: $\exists \vartheta \in]0, 1[: f(x^{(0)} + \underbrace{h}_{\in \mathcal{U}_\varepsilon(0)}) = f(x^{(0)}) + \text{grad } f(x^{(0)}) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(x^{(0)} + \vartheta h) h$ (*)

H_f stetig, da $f \in C^{(2)}$: Wenn $H_f(x^{(0)})$ positiv definit ist, dann existiert δ -Umgebung von $x^{(0)}$, in der H_f positiv definit ist. (Analog für negativ definit.)

Also: $H_f \left| \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right| \text{ definit} \Rightarrow H_f(x^{(0)} + \vartheta h) \left| \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right| \text{ definit, für } h \text{ hinr. nahe bei } 0 \text{ (z.B. } |h| < \delta \text{)}$.

$H_f(x^{(0)}) \left| \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right| \text{ definit} \Rightarrow f(x^{(0)} + h) - f(x^{(0)}) = \frac{1}{2} h^T H_f(x^{(0)} + \vartheta h) h \left| \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array} \right| \quad \forall h \in \mathcal{U}_\delta(0)$

$\Rightarrow f$ lokal $\left| \begin{array}{l} \text{minimal} \\ \text{maximal} \end{array} \right|$ in $x^{(0)}$.

Nun noch: Sei $H_f(x^{(0)})$ indefinit, d.h. $\exists a, b \in \mathbb{R}^n : a^T H_f(x^{(0)}) a > 0$ und $b^T H_f(x^{(0)}) b < 0$.

Sei $\mathcal{U}_\varepsilon(x^{(0)})$ beliebige ε -Umgebung von $x^{(0)}$, $\varepsilon > 0$ beliebig klein.

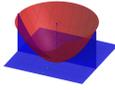
Für $h = \frac{a}{|a|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \in \mathcal{U}_\varepsilon(0) \Rightarrow h^T H_f(x^{(0)}) h > 0 \xrightarrow{\text{wie oben}} f(x^{(0)} + h) > f(x^{(0)})$

Für $h = \frac{b}{|b|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \in \mathcal{U}_\varepsilon(0) \Rightarrow h^T H_f(x^{(0)}) h < 0 \xrightarrow{\text{wie oben}} f(x^{(0)} + h) < f(x^{(0)})$

\Rightarrow kein Extremum.

□

Beispiel 7.3.11:



a) $f(x, y) := x^2 + y^2$

$$\text{grad } f(x, y) = (2x, 2y) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \wedge 2y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ positiv definit } \forall (x, y)$$

\Rightarrow (lokales) Minimum bei $(0, 0)$

b) $f(x, y) := x + y$, $\text{grad } f(x, y) = (1, 1) \neq (0, 0) \forall (x, y)$

\Rightarrow kein Extremum (und da definiert auf ganz \mathbb{R}^2 , kann es auch keine Randextrema geben).

c) $f(x, y) := x \cdot y$, $\text{grad } f(x, y) = (y, x) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ indefinit}$$

$$\text{denn } a^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} a = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = a_1 a_2 + a_2 a_1 = 2a_1 a_2 = \begin{cases} > 0 & a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ < 0 & a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

\Rightarrow kein Extremum

d) $f(x, y) := x^2 + y^4$

$$\text{grad } f(x, y) = (2x, 4y^3) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}, H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ positiv semidefinit}$$

\Rightarrow keine allgemeine Aussage möglich.

Hier im konkreten Beispiel: $f(x, y) \geq 0$ und $f(0, 0) = 0 \Rightarrow$ Minimum.

Aber: $f(x, y) := x^2 + y^3$, gleiche Situation ($x^{(0)} = (0, 0)$, $H_f(x^{(0)})$ positiv semidefinit),

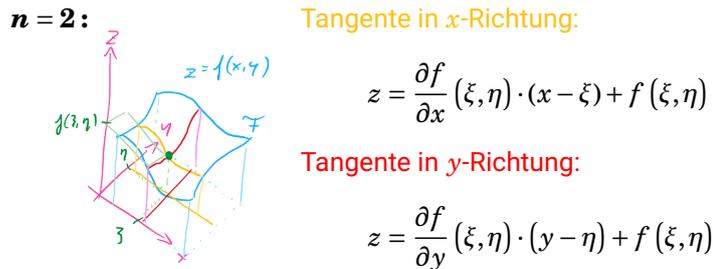
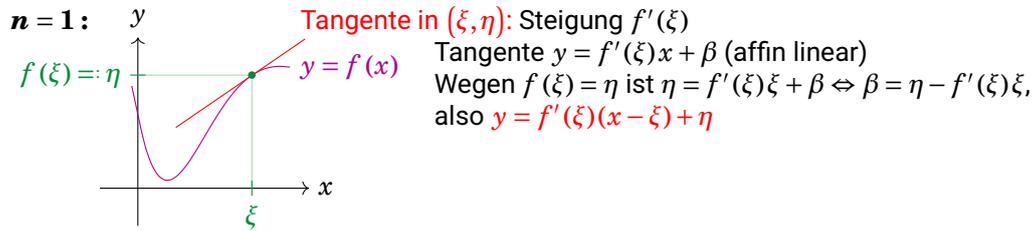
$$f(0, 0) = 0, f(0, \varepsilon) = \varepsilon^3 \begin{cases} > 0 & \varepsilon > 0 \\ < 0 & \varepsilon < 0 \end{cases}$$

\Rightarrow kein Extremum.

7.4 Geometrisches

Beispiel 7.4.1: TANGENTEN

Sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, $x_{n+1} := f(x_1, \dots, x_n)$ Kurve/Fläche in \mathbb{R}^{n+1} .



Tangentialebene an \mathcal{F} in (ξ, η, ζ)

$$\begin{aligned} (x, y) \mapsto z &= \zeta + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta)(x - \xi) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta)(y - \eta) \\ &= \zeta + \text{grad } f(\xi, \eta) \cdot \begin{pmatrix} x - \xi \\ y - \eta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Äquivalente Form:

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\text{grad } f(\xi, \eta), -1 \right)}_{= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta), \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) \right)} \cdot \begin{pmatrix} x - \xi \\ y - \eta \\ z - \zeta \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Definition 7.4.1': TANGENTIALHYPEREBENE

$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$x \in G \subseteq \mathbb{R}^n$, f wie oben: Tangente in $x^{(0)}$ in x_i -Richtung:

$$x_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) (x_i - x_i^{(0)}) + f(x^{(0)})$$

Tangentialhyperebene:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x^{(0)}) + (\text{grad } f(x^{(0)})) (x - x^{(0)}) \\ \Leftrightarrow 0 &= \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla f(x^{(0)}) \\ -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Normale auf } \mathcal{F} \\ \text{in } (x^{(0)}, f(x^{(0)}))}} \cdot \begin{pmatrix} x - x^{(0)} \\ x_{n+1} - f(x^{(0)}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

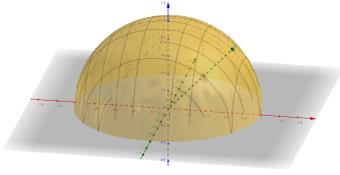
∇f ist die Projektion der Normalen auf G .

Tangentialvektoren: $t_{x_i} = \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \right)^T$ mit 1 in der i -ten Komponente

Tangentialraum: $\left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i t_{x_i} \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \forall i \in \underline{n} \right\}$

Beispiel 7.4.2: HALBKUGEL (EINHEITSKUGEL)

$$z := \sqrt{1 - x^2 - y^2} = f(x, y)$$



$$\nabla f = \left(\frac{1 \cdot (-2x)}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)^T = \left(-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z} \right) = \frac{1}{z}(x, y)$$

Normale: $z \neq 0$

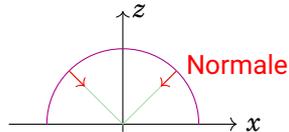
$$\begin{pmatrix} -\frac{x}{z} \\ -\frac{y}{z} \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{z} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = n$$

in $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Tangentialvektoren:

$$t_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{z} \end{pmatrix}, \quad t_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{z} \end{pmatrix}$$

In \mathbb{R}^1 bzw. \mathbb{R}^2 :

**7.5 Umkehrsatz, implizite Funktionen und Lagrange-Multiplikatoren****Zur Erinnerung: 1-D-FALL**

Sei $f : [a, b] \rightarrow I \rightarrow f(I)$, $f \in C^1(I)$.

$f' \neq 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist streng monoton mit Vorzeichen von f' .

$\Rightarrow \exists f^{-1} = g$, diffbar auf $f(I)$ (Definitionsbereich) und $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$.

Jetzt: $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = y$, $x = ?$

Definition 7.5.1: REGULARITÄT UND INVERTIERBARKEIT (MEHRDIMENSIONAL)

$f : \mathbb{R}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt

a) in $x^{(0)} \in G$ **regulär** (regular), wenn

- (i) f in einer Umgebung von $x^{(0)}$ stetig total diffbar
- (ii) $\det f'(x^{(0)}) \neq 0$ (Jacobi-Determinante)

$x^{(0)}$ heißt dann **regulärer Punkt** von f .

b) auf G regulär, wenn f in jedem $x^{(0)} \in G$ regulär ist.

c) in $x^{(0)}$ **lokal invertierbar**, falls eine Umgebung U von $x^{(0)}$ und V von $y^{(0)} := f(x^{(0)})$ existieren, sodass $f|_U : U \rightarrow V$ bijektiv ist.

d) in G lokal invertierbar, falls f in jedem Punkt $x^{(0)} \in G$ lokal invertierbar ist.

$\nRightarrow f$ global invertierbar (d.h. $f|_G$ bijektiv)!

Lemma 7.5.2:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \in G$.

- a) $x^{(0)}$ regulärer Punkt $\Rightarrow \exists$ Umgebung U von $x^{(0)}$, auf der f regulär ist.
 b) Die Menge der regulären Punkte von f ist offen.

Beweis zu 7.5.2:

- a) Bedingung (i): \checkmark ; Bedingung (ii): $\underbrace{\det f'(x)}_{\text{stetig}}$ stetig \checkmark
 b) $x^{(0)}$ in der Menge $\xrightarrow{\text{a)}} x^{(0)}$ innerer Punkt

□

Vorbemerkung 7.5.3:

- a) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann als Element von \mathbb{R}^{n^2} aufgefasst werden.
 $\|\cdot\|$ sei Matrixnorm, $|\cdot|$ sei Norm im \mathbb{R}^n .

Beide nennt man **verträglich**, falls

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \text{ und } |Ax| \leq \|A\| |x| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n$$

- b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : M \rightarrow f(M)$ stetig und injektiv.
 $\Rightarrow f^{-1} : f(M) \rightarrow M$ stetig (analog 1-D)
 c) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Umgebung von $x \in U$, wenn x innerer Punkt von U ist.

Übung 7.5.Ü1: VERTRÄGLICHE NORMEN

Für $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ sind die euklidischen Normen

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \text{ und } \|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}^2}$$

verträglich.

Beweis:

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ wie oben.

Für $n = 1$ ist die Verträglichkeit klar durch Körperaxiome von \mathbb{R} und Dreiecksungleichung für Beträge.

Sei also $n \geq 2$.

Sei im Folgenden, für $i \in \underline{n}$: $A_{-,i} := \begin{pmatrix} A_{1,i} \\ \vdots \\ A_{n,i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ die i -te Spalte von A ,

$A_{i,-} := (A_{i,1}, \dots, A_{i,n}) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ die i -te Zeile von A .

Dann gilt zunächst allgemein:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} = \underbrace{A_{i,-}}_{\substack{\in \mathbb{R}^{1 \times n} \\ \text{Matrixmult.} \\ \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \cong \mathbb{R}}} \cdot \underbrace{B_{-,j}}_{\in \mathbb{R}^{n \times 1}} = \underbrace{A_{i,-}^T}_{\in \mathbb{R}^n} \cdot \underbrace{B_{-,j}}_{\in \mathbb{R}^n} \text{ für } i, j \in \underline{n}$$

Skalarprodukt $\in \mathbb{R}$

Betrachte nun:

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (AB)_{i,j}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A_{i,-}^T \cdot B_{-,j})^2} \\ &\stackrel{\text{CSB}}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (|A_{i,-}^T| \cdot |B_{-,j}|)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{i,-}^T|^2 \cdot |B_{-,j}|^2} \\ &\stackrel{\text{Distr.}}{=} \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^n |A_{i,-}^T|^2}_{\text{unabh. von } j} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n |B_{-,j}|^2}_{\text{unabh. von } i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{k=1}^n A_{i,k}^2} \cdot \sum_{j=1}^n \sqrt{\sum_{k=1}^n B_{l,j}^2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{i,k}^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n B_{l,j}^2} \\ &\stackrel{\text{Komm.}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{i,j}^2} = \|A\| \cdot \|B\| \end{aligned}$$

Und analog dazu:

Zunächst allgemein:

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j = \underbrace{A_{i,-} \cdot x}_{\text{Matrixmult.}} = \underbrace{A_{i,-}^T \cdot x}_{\text{Skalarprod.}} \quad \text{für } i \in \underline{n}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |Ax| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (Ax)_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (A_{i,-}^T \cdot x)^2} \\ &\stackrel{\text{CSB}}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^n (|A_{i,-}^T| \cdot |x|)^2} \stackrel{\text{Distr.}}{=} \sqrt{|x|^2 \cdot \sum_{i=1}^n |A_{i,-}^T|^2} \\ &= |x| \sqrt{\sum_{i=1}^n |A_{i,-}^T|^2} = |x| \sqrt{\sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^n A_{i,j}^2}^2} = |x| \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}^2} \\ &= |x| \cdot \|A\| \stackrel{\text{Komm.}}{=} \|A\| \cdot |x| \end{aligned}$$

□

Satz 7.5.4: UMKEHRSATZ / SATZ VON DER INVERSEN ABBILDUNG

Seien $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ und f in $x^{(0)} \in G$ regulär.
Dann ist f lokal invertierbar: \exists offene Umgebung U von $x^{(0)}$ mit:

- (1) $V := f(U)$ ist offene Umgebung von $y^{(0)} := f(x^{(0)})$
- (2) $f|_U : U \rightarrow V$ ist bijektiv, $\exists g := (f|_U)^{-1} : V \rightarrow U$
- (3) g ist diffbar, $g' = (f')^{-1} \circ g = (f' \circ g)^{-1}$, d.h.

$$\left((f|_U)^{-1} \right)'(y) = (f'(x))^{-1} \quad \text{mit } x = g(y)$$

$(f'(x))^{-1}$ ist inverse Jacobi-Matrix.

Beweis zu 7.5.4:

Banach'scher Fixpunktsatz.

Alternativer Beweis geht über Newton-Verfahren, das man wiederum mit dem Banach'schen Fixpunktsatz beweist. Die Vollständigkeit des \mathbb{R}^n ist für den Umkehrsatz sehr wichtig. □

Beispiel 7.5.5: KREISKOORDINATEN/POLARKOORDINATEN

$$x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi; \varphi \in [0, 2\pi[, r \in \mathbb{R}^+$$

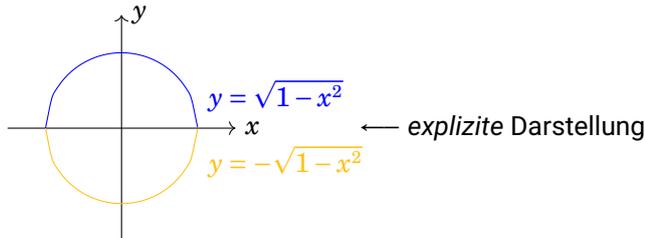
Jacobi-Determinante:

$$\det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r \neq 0$$

(da in $x_1 = x_2 = 0$: $r = 0$, φ beliebig wäre (nicht eindeutig)).

Vgl. Kugelkoordinaten aus Übung

Betrachte nun: $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ implizite Darstellung des Einheitskreises.



hier: nicht global in explizite Darstellung auflösbar.

($x = \cos \varphi, y = \sin \varphi; \varphi \in [0, 2\pi[$ ist Parameterdarstellung.)

Ob und wie man eine explizite Darstellung finden kann, sagt der:

Satz 7.5.6: SATZ ÜBER IMPLIZITE FUNKTIONEN

Voraussetzung: $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$, $G \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig diffbar.

$$M := \{(x, y) \in G \mid f(x, y) = 0\} \neq \emptyset,$$

d.h. $\exists (x^{(0)}, y^{(0)}) \in G : f(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, und für dieses $(x^{(0)}, y^{(0)})$ gelte:

$$\det \left(\frac{\partial f}{\partial y} (x^{(0)}, y^{(0)}) \right) \neq 0$$

$$:= \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} (x^{(0)}, y^{(0)}) \right)_{\substack{i \in \overline{m} \\ j \in \overline{n}}}$$

Behauptung: \exists offene Umgebungen $U \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ von $(x^{(0)}, y^{(0)})$ und $W \subseteq \mathbb{R}^n$ von $x^{(0)}$, und $\exists g \in C^1(W, \mathbb{R}^m)$, sodass

$$M \cap U = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)) \mid x \in W\}$$

d.h. M ist **explizit darstellbar** durch den Graphen von $y = g(x)$, also $f(x, y) = 0, (x, y) \in U \Leftrightarrow y = g(x), x \in W$.

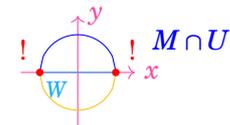
z.B.: $n = 1, m = 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

M : Einheitskreis

$$x^{(0)} := y^{(0)} := \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \neq 0 \text{ für } y = y^{(0)}$$



z.B. $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$,

$$W =]-1, 1[,$$

$$g(x) := \sqrt{1 - x^2}.$$

Dann ist:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid 1 - x^2 - y^2 = 0\} = \{(x, \sqrt{1 - x^2}) \mid x \in]-1, 1[\}$$

d.h. letztendlich: „Kann man ein (nicht-lineares) GLS nach bestimmten Variablen auflösen?“

reiner Existenzsatz!

Beweis zu 7.5.6:

$$\text{Hilfsfunktion: } F(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\in \mathbb{R}^m$$

Extrema mit Nebenbedingungen (Nb.)

z.B.: minimiere $f(x) = e^{x_1^3 + x_2^2}$ unter allen x mit $|x|^2 = 1$ ($g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$).

Idee: Einsetzen von $x_2 = \pm \sqrt{1 - x_1^2}$. Aber: $\sqrt{x^2} = |x|$ in 0 nicht differenzierbar...

besser:

Satz 7.5.8: LAGRANGE-MULTIPLIKATOR-REGEL

(nicht die „Multiplikator-Regel von Lagrange“, sondern die „Regel des Lagrange-Multiplikators“!)

Voraussetzung: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{(1)}(G, \mathbb{R}^1)$, $g \in C^{(1)}(G, \mathbb{R}^m)$, $n > m$, d.h. mehr Variablen als Nb.

f habe in $x^{(0)}$ ein lokales

Maximum
Minimum

 unter der Nebenbedingung $g(x^{(0)}) = 0$,

d.h. $x^{(0)} \in M := \{x \in G \mid g(x) = 0\}$ und \exists Umgebung $\mathcal{U}(x^{(0)})$ mit $f(x) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} f(x^{(0)}) \forall x \in (\mathcal{U}(x^{(0)}) \cap M)$.

Ferner gelte: $\text{Rang} \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(x^{(0)})}_{m \times n} = m$

Behauptung: Dann existiert ein (Lagrange-)Multiplikator $\lambda^{(0)} := (\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}) \in \mathbb{R}^m$, sodass die **Lagrange-Funktion**

$$L(x, \lambda) := f(x) + \lambda \cdot g(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R}^m, \text{Skalarprodukt})$$

in $(x^{(0)}, \lambda^{(0)})$ stationär ist, d.h. $\frac{\partial L}{\partial x}(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) = 0$.

Beweis zu 7.5.8:

Satz über implizite Funktionen:

Nach m der n Komponenten von x kann $g(x) = 0$ lokal aufgelöst werden.

o.B.d.A. nach den letzten m , schreibe $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-m}$, $y \in \mathbb{R}^m$, $x = (\bar{x}, y)$. Sei \tilde{U} Umgebung von $(\bar{x}^{(0)}, y^{(0)}) =: x^{(0)}$.

$$(\bar{x}, y) \in \tilde{U}, g(\bar{x}, y) = 0 \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow y = h(\bar{x}), \bar{x} \in W \text{ (Umgebung von } \bar{x}^{(0)})$$

$\Rightarrow F(\bar{x}) := f(\underbrace{\bar{x}, h(\bar{x})}_{\in M})$ hat in $\bar{x}^{(0)}$ ein lokales Extremum *ohne* Nebenbedingung (**freies** Optimierungsproblem).

$$\Rightarrow \text{grad}(F(\bar{x})) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} = 0 \text{ in } (\bar{x}^{(0)}, h(\bar{x}^{(0)})) \quad (I)$$

$$g(\bar{x}, h(\bar{x})) = 0 \text{ in } W \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} = 0 \text{ in ganz } W$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} = - \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \text{ in } W \text{ (hinreichend klein, sonst kleiner machen)}$$

$$\stackrel{\text{in (I)}}{\implies} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}}}_{=: \lambda^{(0)} \text{ in } (\bar{x}^{(0)}, h(\bar{x}^{(0)})) \text{ Konstante!}} = 0 \text{ in } x^{(0)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \underbrace{(f + \lambda^{(0)} \cdot g)}_{=: L(x, \lambda^{(0)})} = 0 \text{ in } x^{(0)} = (\bar{x}^{(0)}, y^{(0)})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} L(x, \lambda^{(0)}) \Big|_{x^{(0)}} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda^{(0)} \frac{\partial g}{\partial y} \right) \Big|_{x^{(0)}} = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x^{(0)}} - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x^{(0)}} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{x^{(0)}} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{x^{(0)}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(x^{(0)}, \lambda) = g(x^{(0)}) = 0$$

□

Beispiel 7.5.9:

a) $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(G, \mathbb{R})$ definiert **Niveauflächen**: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\} =: M_c$, $c \in \mathbb{R}$ konstant.

Sei (z.B.) $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^{(0)}) \neq 0$, $x^{(0)} \in M_c \xrightarrow{\text{impl. Fkt.}}$ lokal auflösbar $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ in Umgebung.

Normalenvektor zu M_c in Umgebung von $x^{(0)}$:

$$n = \begin{pmatrix} \nabla g \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial(x_1, \dots, x_{n-1})} \\ -1 \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = -\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{-1}}_{\text{Skalar}} \nabla f$$

\Rightarrow Fläche, die durch $f(x) = \text{const.}$ gegeben ist, hat Normalenvektor ∇f .

z.B. Isobaren (Linien gleichen Luftdrucks)

„ \nearrow “ Druckgradient (Richtung des steilsten Anstiegs) ist senkrecht zur Isobare.

b) Welches Rechteck hat bei gegebenem Umfang maximalen Flächeninhalt?

Rechteckfläche $A(a, b) = ab$, Umfang $U(a, b) = 2a + 2b \stackrel{!}{=} \gamma$, d.h. $g(a, b) := 2a + 2b - \gamma \stackrel{!}{=} 0$.

1 Nebenbedingung $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}^1$.

$$L(a, b, \gamma) = ab + \lambda(2a + 2b - \gamma)$$

Notwendige Bedingung:

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial a} = b + 2\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial b} = a + 2\lambda}_{\Rightarrow a=b}, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2a + 2b - \gamma$$

$$\Rightarrow 4a = \gamma \quad \Rightarrow a = b = \frac{\gamma}{4}$$

Man kann sich leicht überlegen, dass es ein Maximum geben muss. Also ist dies durch das Quadrat ($a = b = \gamma/4$) gegeben.

8 Integration längs Kurven und Wegen

8.1 Kurven und Wege

Definition 8.1.1: KURVE UND WEG

Sei $I := [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Eine stetige Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) heißt **Weg** und ihr Bild $\varphi(I)$ heißt **Kurve**.

Den Weg φ bezeichnet man auch als **Parameterdarstellung** der Kurve.

Weitere Bezeichnungen:

- $\varphi(a)$: Anfangspunkt
- $\varphi(b)$: Endpunkt
- φ ist **geschlossen** $:\Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$
- φ ist **Jordan'scher Weg/doppelpunktfreier Weg** $:\Leftrightarrow \varphi$ injektiv
- φ ist **geschlossener Jordan'scher Weg** $:\Leftrightarrow \varphi$ geschlossen und $\varphi|_{]a,b[}$ injektiv
- φ ist **glatt/regulär** $:\Leftrightarrow \varphi \in C^{(1)}(I)$ und $\varphi' \neq 0$ auf I
- φ ist **stückweise glatt/stückweise regulär** $:\Leftrightarrow \exists$ endlich viele Punkte $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$, sodass $\varphi|_{[t_i, t_{i+1}]}$ glatt ist $\forall i \in \{0, \dots, r\}$.
- φ ist **stückweise stetig diffbar** $:\Leftrightarrow \exists$ endlich viele Punkte $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{r-1} < t_r = b$, sodass $\varphi|_{[t_i, t_{i+1}]}$ $\in C^{(1)}[t_i, t_{i+1}] \forall i \in \{0, \dots, r\}$.

Entsprechende Begriffe für $\varphi(I)$ übertragen (Jordan'sche Kurve, ...).

Beispiel 8.1.2:

a) $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto x + t(y - x)$$

$$\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto y + t(x - y)$$

Gleiche Kurven ($\varphi([0, 1]) = \psi([0, 1])$), unterschiedliche (nämlich: entgegengesetzt laufende) Wege.

Geradlinige Verbindung von x und y – glatt und Jordan'sch.

Definition 8.1.3: ÄQUIVALENZRELATION

Sei M eine Menge.

Unter einer **Relation** in M versteht man eine Teilmenge $\sim \subseteq M \times M$ aus Paaren (x, y) , die eine bestimmte Eigenschaft erfüllen. Man schreibt $x \sim y$ für $(x, y) \in \sim$.

Eine Relation \sim heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- (Ä1) $x \sim x \forall x \in M$ (Reflexivität)
- (Ä2) $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x \forall x, y \in M$ (Symmetrie)
- (Ä3) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z \forall x, y, z \in M$ (Transitivität)

Die Menge aller zu $x \in M$ äquivalenten Elemente von M wird als **Äquivalenzklasse** zu x bezeichnet (Notation $[x]_{\sim}$), d.h. $[x]_{\sim} := \{y \in M \mid x \sim y\}$. Man schreibt oft einfach $[x]$, wenn die Relation klar ist.

Die Menge aller Äquivalenzklassen heißt $M/\sim := \{[x]_{\sim} \mid x \in M\}$.

Beispiel 8.1.4:

$=, \Leftrightarrow, \text{„ist gerade“}, \dots$ sind Äquivalenzrelationen.

Definition 8.1.5: ÄQUIVALENZ VON WEGEN

a) Seien I und J Intervalle.

Zwei Jordanwege $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ zur gleichen Kurve $\gamma = \varphi(I) = \psi(J)$ heißen **äquivalent**, wenn es eine streng monoton wachsende Abbildung $h : I \rightarrow J$ gibt, sodass $\varphi = \psi \circ h$.

b) Sei $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg, $I := [a, b]$. Dann bezeichnet

$$\varphi^- : I \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \varphi(a + b - t)$$

den in umgekehrter Orientierung durchlaufenen Weg.

Satz 8.1.6:

- (1) Die Äquivalenz von Wegen ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation.
- (2) Zu einer gegebenen Jordankurve $\gamma = \varphi(I)$ gibt es nur zwei Äquivalenzklassen von Wegen: $[\varphi]$ und $[\varphi^-]$. Diese bezeichnet man als die beiden **Orientierungen** der Kurve.

Beweis zu 8.1.6:

(1) Sei $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Kurve, und $\varphi : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\chi : I_3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ Wege zu dieser Kurve, d.h. $\varphi(I_1) = \psi(I_2) = \chi(I_3) = \gamma$, für Intervalle $I_1 := [a, b]$, $I_2 := [c, d]$, I_3 .

(Ä1) **Reflexivität:** trivial, da $\varphi = \varphi \circ \text{id}_{I_1}$ und id_{I_1} streng monoton wachsend.

(Ä2) **Symmetrie:** Sei $\varphi \sim \psi$, d.h. $\exists h : I_1 \rightarrow I_2$ stetig und streng monoton wachsend mit $\varphi = \psi \circ h$.
 $\Rightarrow h$ bijektiv. $\Rightarrow \exists h^{-1} : I_2 \rightarrow I_1$ stetig. h^{-1} muss ebenfalls streng monoton sein, da sie sonst nicht injektiv wäre. Sie ist streng monoton wachsend, weil $h(a) = c < d = h(b)$ (Zwischenwertsatz)
 $\Rightarrow h^{-1}(c) < h^{-1}(d)$.

$$\Rightarrow \varphi \circ h^{-1} = \psi \circ h \circ h^{-1} = \psi$$

$$\Rightarrow \exists h : I_2 \rightarrow I_1 \text{ stetig, streng monoton wachsend, mit } \varphi \circ h = \psi$$

$$\Rightarrow \psi \sim \varphi$$

(Ä3) **Transitivität:** Sei $\varphi \sim \psi$ durch $h : I_1 \rightarrow I_2$ und $\psi \sim \chi$ durch $g : I_2 \rightarrow I_3$. Es ist $g \circ h$ als Komposition stetiger Funktionen stetig und auch streng monoton steigend, da

$$x < y \Rightarrow h(x) < h(y) \Rightarrow g(h(x)) < g(h(y))$$

$$\text{Ferner gilt: } \varphi = \psi \circ h, \psi = \chi \circ g \stackrel{(\text{Ä2})}{\iff} \psi = \varphi \circ h^{-1}$$

$$\text{Einsetzen ergibt: } \Rightarrow \varphi \circ h^{-1} = \chi \circ g \stackrel{\text{R}h}{\iff} \varphi = \chi \circ g \circ h$$

$$\text{und da Komposition immer assoziativ ist: } \Rightarrow \varphi = \chi \circ (g \circ h)$$

wobei $g \circ h$ wie oben beschrieben die Eigenschaften der Umrechenregel erfüllt, also:

$$\Rightarrow \varphi \sim \chi.$$

(2) Sei $I := [a, b]$, $J := [c, d]$ und $\psi : J \rightarrow \gamma$ ein weiterer Jordan-Weg mit $\psi(J) = \gamma$.

ψ bijektiv $\Rightarrow \exists \psi^{-1} : \gamma \rightarrow J$ (stetig).

Sei $h := \psi^{-1} \circ \varphi : I \rightarrow J$. Hierbei ist h stetig und bijektiv, wobei $\psi \circ h = \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi = \varphi$.

Als stetige 1-D-Funktion zwischen Intervallen kann h im ZWS verwendet werden. Es gibt also nur zwei Möglichkeiten:

FALL 1: h streng monoton wachsend. $\Rightarrow \varphi \sim \psi$ durch h

FALL 2: h streng monoton fallend. Sei $\tilde{h}(t) := c + d - h(t) \forall t \in I$. \tilde{h} ist stetig und monoton wachsend, wobei

$$\tilde{h}(a) = c + d - \underbrace{h(a)}_{=d} = c, \tilde{h}(b) = c + d - \underbrace{h(b)}_{=c} = d$$

$$\Rightarrow \psi \circ \tilde{h} = \varphi^- \Rightarrow \psi \sim \varphi^-$$

□

Satz 8.1.7:

Seien $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatte Jordanwege mit $\varphi \in [\psi]$ oder $\varphi \in [\psi^-]$.
Dann existiert $h : I \rightarrow J$ mit $\psi \circ h = \varphi$, wobei h bijektiv ist mit $h \in C^{(1)}(I)$ und $h' \neq 0$ auf I .

8.2 Weglänge

Gesucht: Länge einer Kurve $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Weg $\varphi : I \rightarrow \gamma$.

Idee: Approximation durch Polygonzüge, basierend auf einer Zerlegung Z des Intervalls I (ähnlich wie bei Riemann-Integral).

Definition 8.2.1: WEGLÄNGE

Sei $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg und Z eine Zerlegung von I (also: $a = t_0 < \dots < t_r = b$). Dann sei

$$l_\varphi(Z) := \sum_{j=0}^{r-1} |\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)|$$

Man bezeichnet

$$L(\varphi) := \sup \{l_\varphi(Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } I\}$$

als die **Weglänge** von φ .

Ist $L(\varphi) < +\infty$, so heißt φ **rektifizierbar**.

Satz 8.2.2:

Seien $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei beliebige Wege, $I = [a, b]$. Dann gilt:

- Ist φ Lipschitzsch mit Lipschitzkonstante Λ , so ist φ rektifizierbar mit $L(\varphi) \leq \Lambda(b-a)$.
- Sind φ und ψ rektifizierbar, so ist $|L(\varphi) - L(\psi)| \leq L(\varphi - \psi)$. (**Dreiecksungl. für Weglängen**)
- $L(\varphi) \geq |\varphi(b) - \varphi(a)|$ („Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist eine Strecke.“)

Beweis zu 8.2.2:

$$a) \quad |\varphi(s) - \varphi(t)| = \Lambda |s - t| \quad \forall s, t \in I$$

Sei Z eine beliebige Zerlegung von I . Dann gilt:

$$l_\varphi(Z) = \sum_{j=0}^{r-1} |\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)| \leq \sum_{j=0}^{r-1} \Lambda |t_{j+1} - t_j| = \Lambda \underbrace{\sum_{j=0}^{r-1} (t_{j+1} - t_j)}_{\text{Teleskopsumme}} = \Lambda(t_r - t_0) = \Lambda(b-a)$$

$$\Rightarrow L(\varphi) \leq \Lambda(b-a)$$

$$b) \quad (|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x + y|; \text{ mit vertauschten Rollen } ||x| - |y|| \leq |x + y|)$$

$$\begin{aligned} |l_\varphi(Z) - l_\psi(Z)| &= \left| \sum_{j=0}^{r-1} (|\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)| - |\psi(t_{j+1}) - \psi(t_j)|) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{r-1} ||\dots| - |\dots|| \leq \sum_{j=0}^{r-1} |\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j) - (\psi(t_{j+1}) - \psi(t_j))| \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} |(\varphi - \psi)(t_{j+1}) - (\varphi - \psi)(t_j)| = l_{\varphi - \psi}(Z) \leq L(\varphi - \psi) \end{aligned}$$

$$c) \quad Z := \{a, b\} \text{ ist auch eine Zerlegung. } L(\varphi) \geq |\varphi(t_1) - \varphi(t_0)| = |\varphi(b) - \varphi(a)|$$

□

Satz 8.2.3:

Äquivalente Wege haben die gleiche Länge und es gilt außerdem $L(\varphi) = L(\varphi^-)$, d.h. die Weglänge hängt nur von der Kurve ab.

Beweis zu 8.2.3:

Seien $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi \sim \psi$.

$\Rightarrow \exists h: I \rightarrow J$ stetig monoton wachsend mit $\psi \circ h = \varphi$.

Sei Z Zerlegung von $I \Rightarrow Z' := \{h(t) | t \in Z\}$ definiert Zerlegung von J , $h(t_j) < h(t_{j+1}) \forall j$.

$$l_\varphi(Z) = \sum_{j=0}^{r-1} |\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)| = \sum_{j=0}^{r-1} |\psi(h(t_{j+1})) - \psi(h(t_j))| = l_\psi(Z')$$

und umgekehrt, da h bijektiv ist. $\Rightarrow L(\varphi) = L(\psi)$

Ferner: Z Zerlegung von $I \Rightarrow \{\alpha + b - t | t \in Z\} =: Z'$ Zerlegung von I .

$$l_\varphi(Z) = l_{\varphi^-}(Z') \Rightarrow L(\varphi) = L(\varphi^-)$$

□

Man kann deshalb auch von einer **Kurvenlänge** sprechen, also $L(\varphi(I)) := L(\varphi)$.

Ist $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg, dann ist $\varphi|_{[a, t]} \forall t \in]a, b]$ auch ein Weg.

Definition 8.2.4: BOGENLÄNGE

Sei $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg.

Dann heißt $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$s(t) := \begin{cases} 0 & t = a \\ L(\varphi|_{[a, t]}) & t > a \end{cases}$$

Weglänge oder Bogenlänge.

Satz 8.2.5:

Sei $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ rektifizierbar. Dann ist die zugehörige Bogenlänge s auf I stetig und monoton wachsend.

Ist φ ein Jordanweg, so ist s streng monoton wachsend.

Ist φ (stückweise) stetig diffbar, dann ist s auch (stückweise) stetig diffbar und

$$s(t) = \int_a^t |\varphi'(\tau)| d\tau \quad \forall t \in I$$

Beweis zu 8.2.5:

a) **Monotonie:** Sei $t_1 < t_2$. Offensichtlich ist

$$s(t_2) - s(t_1) = L(\varphi|_{[t_1, t_2]}) \stackrel{8.2.2.c)}{\geq} |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \geq 0$$

und „ > 0 “, falls φ injektiv (also *streng* monoton bei Jordanwegen).

b) **Stetigkeit:** Sei $\varepsilon > 0$. Da I kompakt ist, ist φ gleichmäßig stetig.

Also $\exists \delta > 0: |\tau_1 - \tau_2| < \delta, \tau_1, \tau_2 \in I \Rightarrow |\varphi(\tau_2) - \varphi(\tau_1)| < \varepsilon$

Sei Z Zerlegung von I mit $L(\varphi) - \varepsilon \leq l_\varphi(Z) \leq L(\varphi)$.

Da $Z_1 \subseteq Z_2 \Rightarrow l_\varphi(Z_1) \leq l_\varphi(Z_2)$ gilt, können wir außerdem fordern, dass $\delta(Z) = \max_j (t_{j+1} - t_j) < \delta$.

$\Rightarrow |\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)| < \varepsilon \forall j$

Ferner:

$$\underbrace{L\left(\varphi|_{[t_k, t_{k+1}]}\right) - |\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)|}_{\geq 0 \text{ nach 8.2.2.c}} \leq \sum_{j=0}^{r-1} \underbrace{\left(L\left(\varphi|_{[t_j, t_{j+1}]}\right) - |\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)|\right)}_{\geq 0} = L(\varphi) - l_\varphi(Z) \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow L\left(\varphi|_{[t_k, t_{k+1}]}\right) \leq \varepsilon + |\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Angenommen, s springt in τ mit $t_k \leq \tau \leq t_{k+1}$.

$$\Rightarrow \lim_{t_{k+1} \rightarrow \tau^+} s(t_{k+1}) - \lim_{t_k \rightarrow \tau^-} s(t_k) > 0$$

$$\text{aber } s(t_{k+1}) - s(t_k) = L\left(\varphi|_{[t_k, t_{k+1}]}\right) < 2\varepsilon.$$

Die Grenzübergänge bewirken, dass dies für alle $\varepsilon > 0$ geht. ζ

c) $C^{(1)}$: also φ' gleichmäßig stetig.

Sei $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ dazu gegeben, sodass $(|\tau_1 - \tau_2| < \delta \Rightarrow |\varphi'(\tau_1) - \varphi'(\tau_2)| < \varepsilon)$.

Seien τ_1 und τ_2 mit $0 < \tau_2 - \tau_1 < \delta$ fest.

Seien $\Phi(t) := \varphi(\tau_1) + (t - \tau_1)\varphi'(\tau_1)$, $t \in I$ und $\Psi(t) := (\varphi - \Phi)(t)$, $t \in I$.

Φ beschreibt eine Strecke:

$$L\left(\Phi|_{[\tau_1, \tau_2]}\right) = |\Phi(\tau_2) - \Phi(\tau_1)| = |(\tau_2 - \tau_1)\varphi'(\tau_1)| = (\tau_2 - \tau_1)|\varphi'(\tau_1)|$$

Ferner gilt:

$$|\Psi'(t)| = |\varphi'(t) - \Phi'(t)| = |\varphi'(t) - \varphi'(\tau_1)| < \varepsilon$$

für $|t - \tau_1| < \delta$, insbesondere für $t \in [\tau_1, \tau_2] =: J$. $\Rightarrow \varepsilon$ ist Lipschitzkonstante von Ψ auf J .

$$\stackrel{8.2.2.a)}{\Rightarrow} L(\Psi|_J) \leq \varepsilon(\tau_2 - \tau_1)$$

$$\stackrel{8.2.2.b)}{\Rightarrow} |L(\varphi|_J) - L(\Phi|_J)| \leq L((\varphi - \Phi)|_J) = L(\Psi|_J) \leq \varepsilon(\tau_2 - \tau_1)$$

$$\Rightarrow |s(\tau_2) - s(\tau_1) - (\tau_2 - \tau_1)|\varphi'(\tau_1)|| \leq \varepsilon(\tau_2 - \tau_1)$$

\Rightarrow für $\tau_2 \in [\tau_1, \tau_1 + \delta]$ gilt:

$$\left| \frac{s(\tau_2) - s(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} - |\varphi'(\tau_1)| \right| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{\tau_2 \rightarrow \tau_1^+} \frac{s(\tau_2) - s(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \text{ existiert und } = |\varphi'(\tau_1)|$$

Analog für den linksseitigen Grenzwert mit $\Phi(t) := \varphi(\tau_2) + (t - \tau_2)\varphi'(\tau_2)$.

$$\Rightarrow s'(t) = |\varphi'(t)| \quad \forall t \in I$$

$$\stackrel{\text{HSDI}}{\Rightarrow} s(t) = \int_a^t |\varphi'(\tau)| \, d\tau + \underbrace{s(a)}_{:=0}$$

□

Beispiel 8.2.6:

a) Kreisumfang:

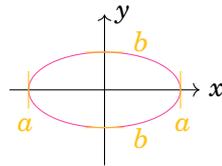
$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} |\varphi'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \left| \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} \right| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$$

Fläche? → Analysis III.

b) Umgang einer Ellipse:

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi], \text{ hier: } a > b$$



$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$$

$$|\varphi'(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben durch $a^2 = b^2 + \varepsilon^2$. ε heißt **lineare Exzentrizität**.

$$|\varphi'(t)| = \sqrt{b^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + \varepsilon^2 \sin^2 t}$$

$$\Rightarrow L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2 t} dt$$

$$\Rightarrow L(\varphi) = b \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{b}\right)^2 \sin^2 t} dt$$

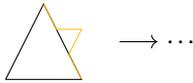
Dieses Integral ist nicht weiter auflösbar.

Es existieren viele solcher Integrale. Im Gegensatz zu Ableitungen, die es immer eindeutig gibt, kann man manche Integrale nicht eindeutig auflösen. Diese kann man dann nur numerisch näherungsweise ausrechnen.

Ein solches Integral heißt **elliptisches Integral**.

Beispiel 8.2.6:

c) Wir konstruieren eine Kurve iterativ:



Der Limes heißt **Kochkurve**. Nicht rektifizierbar → **Fraktale Geometrie**.

d) Die Länge eines Graphen:

Sei $f \in C^1[a, b]$ und $\Gamma := \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$ der zugehörige Graph.

Parametrisierung mit x :

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, t \in [a, b]$$

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

e) Parametrisierung über Bogenlänge: Beispiel Einheitskreis.

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

$$s(t) = \int_0^t |\varphi'(\tau)| d\tau = t$$

d.h. dies ist schon eine Parametrisierung über die Bogenlänge.

Kreis mit Radius r :

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$$

$$s(t) = \int_0^t r d\tau = rt$$

Parametrisierung über die Bogenlänge:

$$\tilde{\varphi}(s) = \begin{pmatrix} r \cos\left(\frac{s}{r}\right) \\ r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \end{pmatrix}, s \in [0, 2\pi r]$$

Denn mit der Bogenlänge kann man ein paar Dinge einfacher machen.

Bemerkung 8.2.7: TANGENTE UND NORMALE

Interpretiert man eine Kurve als eine Bahn $x(t)$, so ist die Tangente an der Bahn in $x(t_1)$ gleich der Geschwindigkeit $\dot{x}(t_1) := x'(t_1)$.

Sekante durch $x(t_1)$ und $x(t_2)$:

$$\psi(t) = x(t_1) + \frac{t}{t_2 - t_1} (x(t_2) - x(t_1)) \begin{cases} t = 0: \psi(0) = x(t_1) \\ \psi(t_2 - t_1) = x(t_2) \end{cases}$$

$\lim_{t_2 \rightarrow t_1}$ ergibt: $x(t_1) + t\dot{x}(t_1)$ Tangente

Vgl. Definition der totalen Ableitung von $t \mapsto x(t)$ in t_1 :

$$x(t_1 + h) = \underbrace{x(t_1) + \dot{x}(t_1)h}_{\substack{\text{Tangente} \\ \text{(mit } h \text{ als Parameter)}}} + o(|h|) \text{ für } h \rightarrow 0$$

Hängt die Tangente von der Parametrisierung ab?

Sei $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\psi(J) = x(I)$ gegeben, wobei beides glatte Jordan-Wege sind.

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{8.1.6} \exists h: I \rightarrow J, \in C^{(1)}, h' \neq 0 \text{ (streng monoton)}: \psi \circ h = x \\ \xrightarrow{8.1.7} \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{Kettenregel}} \dot{x}(t) = \psi'(h(t)) \cdot \dot{h}(t)$$

In $x^{(0)} = x(t_1) = \psi(t_2) (\Rightarrow t_2 = h(t_1))$ erhält man also als Tangentialvektor:

- bzgl. x : $\dot{x}(t_1)$
- bzgl. ψ : $\psi'(t_2) = \frac{\dot{x}(t_1)}{\dot{h}(t_1)} \neq 0$

Die Tangentialvektoren unterscheiden sich also nur durch einen skalaren Faktor $\neq 0$. Sie erzeugen somit die gleiche Tangente.

Zum Tangentialvektor in $x^{(0)}$ gibt es eine $(n-1)$ -dimensionale, orthogonale Hyperebene, die **Normalenebene**. Sie ist gegeben durch

$$(x - x^{(0)}) \cdot t = 0$$

wenn t Tangentialvektor in $x^{(0)}$ ist (siehe oben).

Nimmt man die *Bogenlänge als Parameter*, so erhält man: Sei $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto \varphi(s)$ eine solche Parametrisierung, $[c, d] \ni t \mapsto s(t)$ Bogenlänge.

$\Rightarrow \psi(t) := \varphi(s(t))$ neue Parametrisierung (zu der s die Bogenlänge ist).

Tangentialvektoren:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi(t) &= \frac{d}{dt} \varphi(s(t)) = \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \left| \frac{d\psi}{dt} \right| \\ \Rightarrow \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{d\psi}{dt} / \left| \frac{d\psi}{dt} \right| \text{ Tangentialeinheitsvektor (wenn } \frac{d\psi}{dt} \neq 0 \text{ z.B. glatter Weg)} \\ \Rightarrow \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| &= 1 \\ \Rightarrow \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{d\varphi}{ds} &= 1 \forall s \Rightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0 \forall s \\ \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{ds^2} &\text{ ist ein Normalenvektor – die Hauptnormale.} \end{aligned}$$

Für den Fall $\varphi''(s) \neq 0$ führt man folgendes ein:

- $|\varphi''(s)|$: Krümmung
- $\frac{1}{|\varphi''(s)|}$: Krümmungsradius (Radius eines Kreises mit der gleichen Krümmung)

Satz 8.2.8:

Jeder stückweise diffbarer Jordanweg ist rektifizierbar.
Dies gilt auch für stückweise stetig diffbare geschlossene Jordanwege.
Die Formel aus 8.2.5 ist somit anwendbar.

8.3 Kurvenintegrale**Schwerpunkt von n Massepunkten**

Seien die Massen m_1, \dots, m_n an den Orten $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$.

Schwerpunkt: $s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x^{(i)}$

Gesamtmasse: $M = \sum_{i=1}^n m_i$

Wie sieht das bei kontinuierlich verteilten Massen aus?

Sei $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg und $\rho: \varphi(I) \rightarrow \mathbb{R}$ die lineare Dichte (Masse pro Längeneinheit). Wir unterteilen die Kurve in Teilstücke gemäß einer Zerlegung Z von I .

Für die Gesamtmasse M gilt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \inf_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \rho(\varphi(t)) (s(t_{i+1}) - s(t_i)) \leq M \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \rho(\varphi(t)) (s(t_{i+1}) - s(t_i))$$

Diese Unter- und Obersummen führen zu dem Riemann-Stieltjes-Integral $\int_a^b \rho(\varphi(t)) ds(t)$,

Definition 8.3.1: KURVENINTEGRAL

Sei $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I := [a, b]$, ein Jordanweg einer rektifizierbaren Kurve $\gamma := \varphi(I)$ mit Bogenlängenfunktion $s: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Ist $f: \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ (wenn vektoriell, dann komponentenweise) eine Funktion, sodass das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_a^b f(\varphi(t)) ds(t) =: \int_{\gamma} f(x) ds$$

existiert, so nennt man f **integrierbar längs der Kurve** γ und $\int_{\gamma} f ds$ das **Kurvenintegral** von f längs der Kurve γ (bzgl. der Bogenlänge).

Satz 8.3.2:

Sei $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan'sche rektifizierbare Kurve und $f: \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion.
Existiert das Integral längs γ

$$\int_{\gamma} f(x) ds$$

für mindestens eine Parametrisierung $\varphi: I \rightarrow \gamma$, so existiert dieses für alle Jordan'schen Parametrisierungen von γ und führt stets zum gleichen Ergebnis (daher *Kurvenintegral*).

Beweis zu 8.3.2:

Erinnerung: Es ist bei Riemann-(Stieltjes-)Integralen egal, ob man Ober-, Unter- oder Zwischensummen betrachtet.

Wir benutzen Zwischen- statt Ober- und Untersummen.

Seien $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Jordan'sche Wege mit $\varphi(I) = \psi(J) =: \gamma$.

$\xrightarrow{8.1.6} \psi \in [\varphi]$ oder $\psi \in [\varphi^-]$, d.h. \exists bijektive streng monotone Funktion $h: I \rightarrow J$ mit $\psi \circ h = \varphi$.

Sei Z eine Zerlegung von I ($a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$). Bzgl. φ erhält man

- Weglänge $s_{\varphi}: I \rightarrow \mathbb{R}$

- Zwischensumme $\sum_{i=0}^{r-1} f(\varphi(\tau_i)) (s_\varphi(t_{i+1}) - s_\varphi(t_i))$, $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$

Hierzu gehört bei ψ :

- Weglänge $s_\psi : J \rightarrow \mathbb{R} \begin{cases} \text{bei mon. wachsendem } h : s_\psi(h(t)) = s_\varphi(t) \quad \forall t \\ \text{bei mon. fallendem } h : s_\psi(h(t)) = L(\varphi) - s_\varphi(t) \quad \forall t \end{cases}$

- Zerlegung $\tilde{Z} := \{h(t_i) \mid t_i \in Z\}$ mit Zwischenpunkten $h(\tau_i)$

- Zwischensumme

- bei monoton wachsendem h :

$$\sum_{i=0}^{r-1} f(\psi(h(\tau_i))) (s_\psi(h(t_{i+1})) - s_\psi(h(t_i)))$$

- bei monoton fallendem h :

$$\sum_{i=0}^{r-1} f(\psi(h(\tau_i))) (s_\psi(h(t_{i+1})) - s_\psi(h(t_i)))$$

Dies sind die gleichen Zwischensummen, wie man sie bei φ erhält.

□

Wir befassen uns nun genauer mit dem R.-S.-Integral

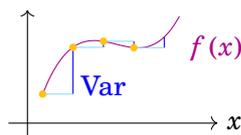
$$\int_a^b f(t) d\sigma(t)$$

Hierbei lassen wir die Bedingung fallen, dass σ monoton wachsend ist.

Definition 8.3.3: VARIATION

Für eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf $I := [a, b]$ und eine Zerlegung Z von I definieren wir die **Variation**

$$\text{Var}(Z; f) := \sum_{i=0}^{r-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$



Ferner heißt

$$V(f) := V_a^b(f) := \sup \{ \text{Var}(Z; f) \mid Z \text{ Zerlegung von } I \}$$

die **Totalvariation** von f .

f heißt **von beschränkter Variation** (*bounded variation*), wenn $V(f) < +\infty$.

$$\text{BV}[a, b] := \{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid V(f) < +\infty \}$$

Satz 8.3.4: RAUM DER FUNKTIONEN BESCHRÄNKTER VARIATION

$\text{BV}[a, b]$ ist eine \mathbb{R} -Algebra.

Es gilt:

$$V(\lambda f + g) \leq |\lambda| V(f) + V(g) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, f, g \in \text{BV}[a, b]$$

$$V(fg) \leq \|f\|_\infty V(g) + \|g\|_\infty V(f) \quad \forall f, g \in \text{BV}[a, b]$$

Außerdem sind alle $f, g \in \text{BV}[a, b]$ beschränkt.

Beweis zu 8.3.4:

Betrachte die Zerlegung $Z := \{a, t, b\}$ für ein beliebiges, aber festes $t \in]a, b[$. Dann gilt:

$$\text{Var}(Z; f) = |f(t) - f(a)| + |f(b) - f(t)| \leq V(f)$$

$$\Rightarrow |f(t) - f(a)| \leq V(f)$$

$$\Rightarrow |f(t)| \leq |f(t) - f(a)| + |f(a)| \leq V(f) + |f(a)|$$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq V(f) + |f(a)|$$

$\Rightarrow f$ beschränkt, wenn in $BV[a, b]$

$$V(\lambda f + g) \leq |\lambda|V(f) + V(g) \text{ analog Übung}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z; f \cdot g) &= \sum_{i=0}^{r-1} |(f \cdot g)(t_{i+1}) - (f \cdot g)(t_i)| \\ &\leq \sum_{i=0}^{r-1} \left(|f(t_{i+1})(g(t_{i+1}) - g(t_i))| + |g(t_i)(f(t_{i+1}) - f(t_i))| \right) \quad \leftarrow \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &\leq \|f\|_\infty \underbrace{\sum_{i=0}^{r-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|}_{=V(Z;g)} + \|g\|_\infty \underbrace{\sum_{i=0}^{r-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|}_{=V(Z;f)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow V(f \cdot g) \leq \|f\|_\infty V(g) + \|g\|_\infty V(f) \quad \square$$

Übung 8.3.Ü1:

$BV[a, b]$ ist ein normierter Raum durch die Norm

$$\|f\|_{BV[a,b]} := V_a^b(f) + |f(a)|$$

für $f \in BV[a, b]$.

Satz 8.3.5:

Folgende Funktionen auf I sind stets von beschränkter Variation:

- (1) monotone Funktionen.
- (2) Lipschitzstetige Funktionen.

Beweis zu 8.3.5:

(1) Sei f monoton, zunächst monoton wachsend.

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z; f) &= \sum_{i=0}^{r-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|, f(t_i) \leq f(t_{i+1}) \quad \forall i \\ \Rightarrow \text{Var}(Z; f) &= \sum_{i=0}^{r-1} (f(t_{i+1}) - f(t_i)) \stackrel{\text{Teleskopsumme}}{=} f(t_r) - f(t_0) = f(b) - f(a) \end{aligned}$$

$$\text{Monoton fallend: } \text{Var}(Z; f) = -\sum_{i=0}^{r-1} (f(t_{i+1}) - f(t_i)) = f(a) - f(b) \quad \checkmark$$

(2) Sei f Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante Λ .

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z; f) &= \sum_{i=0}^{r-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leq \Lambda \sum_{i=0}^{r-1} |t_{i+1} - t_i| = \Lambda \sum_{i=0}^{r-1} (t_{i+1} - t_i) = \Lambda(b - a) \\ \Rightarrow V(f) &\leq \Lambda(b - a) \end{aligned}$$

□

Satz 8.3.6: DARSTELLUNGSSATZ VON JORDAN

Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Variation, wenn sie als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellbar ist.

Beweis zu 8.3.6:

„ \Leftarrow “ folgt aus Sätzen 8.3.4 und 8.3.5.

„ \Rightarrow “ Sei $f \in BV[a, b]$. Dazu sei $g(t) := V_a^t(f) \forall t \in I := [a, b]$. g ist monoton wachsend ($s < t \Rightarrow$ Jede Zerlegung von $[a, s]$ ist Teil mindestens einer Zerlegung von $[a, t]$).

Es gilt ferner für $c, d \in I$ mit $c < d$, dass:

$$f(d) - f(c) \leq |f(d) - f(c)| \stackrel{Z:=\{c,d\}}{\leq} V_c^d(f) = g(d) - g(c)$$

Setze $h := g - f \Rightarrow h(c) - f(c) \leq g(d) - f(d)$, also $h \nearrow \Rightarrow f = g - h$

□

Satz 8.3.7:

Sei $f \in C[a, b]$ und $g \in BV[a, b]$. Dann existiert

$$\int_a^b f \, dg$$

und es gilt

$$\left| \int_a^b f \, dg \right| \leq \|f\|_\infty \cdot V_a^b(g)$$

Da die Bogenlänge s monoton wachsend ist, ist sie nach 8.3.5 von beschränkter Variation. Somit existiert das Kurvenintegral $\int_a^b f(x) \, ds$ für alle stetigen Funktionen f .

Nach Satz 8.2.5 ist s außerdem stetig diffbar, wenn φ stetig diffbar ist. In diesem Fall gilt noch mehr.

Satz 8.3.8:

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, $I := [a, b]$, $g \in C^{(1)}(I)$.

Dann existiert $\int_a^b f \, dg$, und es gilt $\int_a^b f \, dg = \int_a^b f(t) \cdot g'(t) \, dt$.

Beweis zu 8.3.8:

f ist beschränkt. Sei $M := \|f\|_\infty$. g' ist gleichmäßig stetig, da stetig auf Kompaktum.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists \delta > 0 : (|c - d| < \delta \Rightarrow |g'(c) - g'(d)| < \varepsilon)$.

Sei Z eine Zerlegung von I mit $\delta(Z) < \delta$. Wir wissen: $|f|$ ist R.-intbar.

$$\left| \int_a^b f(t) g'(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \|g'\|_\infty \, dt$$

Wir betrachten die R.-S.-Zwischensummen:

$$\sum_{j=0}^{r-1} f(\tau_j) (g(t_{j+1}) - g(t_j)) \stackrel{\substack{\text{MWS DIFF} \\ \exists \tilde{\tau}_j \in [t_j, t_{j+1}]}}{=} \sum_{j=0}^{r-1} f(\tau_j) g'(\tilde{\tau}_j) (t_{j+1} - t_j)$$

mit $t_j \leq \tau_j \leq t_{j+1}$.

Wir betrachten:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=0}^{r-1} f(\tau_j) g'(\tilde{\tau}_j) (t_{j+1} - t_j) - \underbrace{\sum_{j=0}^{r-1} f(\tau_j) g'(\tau_j) (t_{j+1} - t_j)}_{\text{R-Zwischensumme zu } \int_a^b f(t)g'(t)dt} \right| \\ &= \left| \sum_{j=0}^{r-1} f(\tau_j) (t_{j+1} - t_j) (g'(\tilde{\tau}_j) - g'(\tau_j)) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{r-1} \underbrace{|f(\tau_j)|}_{\leq M} \underbrace{|t_{j+1} - t_j|}_{=t_{j+1}-t_j} \underbrace{|g'(\tilde{\tau}_j) - g'(\tau_j)|}_{< \varepsilon} \\ &\leq M\varepsilon(b-a) \leq \varepsilon \cdot \text{const.} \end{aligned}$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also eine Zerlegung Z , sodass für diese und ihre Verfeinerungen die beiden Zwischensummen sich höchstens um $M(b-a)\varepsilon$ unterscheiden. → Konvergenz!

$$\Rightarrow \int_a^b f dg \text{ existiert und } \int_a^b f dg = \int_a^b f(t)g'(t) dt$$

□

Korollar 8.3.9:

Sei $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer, stückweise stetig diffbarer Jordan'scher Weg. Dann gilt $\forall f : \varphi(I) \rightarrow \mathbb{R}$, für die $\int_{\varphi(I)} f ds$ existiert, dass:

$$\int_{\varphi(I)} f ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \underbrace{|\varphi'(t)|}_{\stackrel{(8.2.5)}{=} s'(t)} dt$$

Die Kurvenlänge ist also $L(\varphi) = \int_{\varphi(I)} 1 ds$.

Beispiel 8.3.10:

Einheitskreis $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, mit Massendichte $\rho(x, y) := x^2 + 2y^2$.

Sei $K_1(0)$ die Kreislinie.

Gesamtmasse:

$$\begin{aligned} M &= \int_{K_1(0)} \rho ds = \int_0^{2\pi} \rho(\cos t, \sin t) \cdot |\varphi'(t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 2\sin^2 t) \cdot 1 dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 + \sin^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} (3t - \sin t \cos t) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi \end{aligned}$$

Schwerpunkt:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{M} \left(\int_{K_1(0)} x \rho(x, y) ds, \int_{K_1(0)} y \rho(x, y) ds \right) \\ &= \frac{1}{M} \int_{K_1(0)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rho(x, y) ds \\ &= \frac{1}{3\pi} \left(\int_0^{2\pi} \cos t (1 + \sin^2 t) \cdot 1 dt, \int_0^{2\pi} \sin t (1 + \sin^2 t) \cdot 1 dt \right) \\ &\quad \text{partielle Integration} \\ &\quad \quad \quad \dots \end{aligned}$$

8.4 Wegintegrale

Definition 8.4.1: WEGINTEGRAL

Sei $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I := [a, b]$, ein rektifizierbarer, Jordan'scher Weg und $\gamma := \varphi(I)$.

a) Für $f : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ sei

$$\int_{\varphi} f(x) dx_k := \int_a^b f(\varphi(t)) d\varphi_k(t); k \in \underline{n}$$

das (skalare) **Wegintegral** von f bzgl. x_k längs φ , sofern das Integral existiert.

b) Für $F : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten F_1, \dots, F_n sei

$$\int_{\varphi} F(x) \cdot dx := \int_{\varphi} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots + F_n dx_n := \sum_{k=1}^n \int_{\varphi} F_k(x) dx_k$$

das **Wegintegral** oder **Arbeitsintegral** von F längs φ , sofern das Integral existiert.

Bei *geschlossenen* Wegen schreibt man auch \oint statt \int .

Die bekannten Rechenregeln für R.-(S.)-Integrale übertragen sich auf das Wegintegral, insbesondere für stückweise stetig diffbare φ , da dann nach Satz 8.3.8 gilt:

$$\int_{\varphi} f(x) dx_k = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'_k(t) dt$$

$$\int_{\varphi} F(x) \cdot dx = \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i(\varphi(t)) \varphi'_i(t) dt = \int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Beispiel 8.4.2:

$K_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ (Einheitskreis) wie im letzten Beispiel.

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi];$$

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, t \in [0, \pi];$$

$$\psi(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi];$$

$\varphi \sim \Phi$, $\psi \sim \varphi^-$.

$$\text{Sei } F(x, y) := \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

$$\oint_{\varphi} F \cdot d(x, y) = \oint_{\varphi} y dx - x dy = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (-1) dt = -2\pi$$

$$\oint_{\Phi} F \cdot d(x, y) = \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix} dt = 2 \int_0^{\pi} (-1) dt = -2\pi$$

$$\oint_{\psi} F \cdot d(x, y) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

Das Wegintegral ist also *wegabhängig*.

Beispiel 8.4.2:

Sei nun $G(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.

$$\oint_{\varphi} G \cdot d(x, y) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (-2 \sin t \cos t) dt = \cos^2 t \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\oint_{\Phi} G \cdot d(x, y) = \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin(2t) \\ 2 \cos(2t) \end{pmatrix} dt = 2 \int_0^{\pi} 2 \sin(2t) \cos(2t) dt = \cos^2(2t) \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\oint_{\psi} G \cdot d(x, y) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} dt = -2 \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = 0$$

Aber offenbar nicht immer!

Satz 8.4.3: ÄQUIVALENZ UND WEGINTEGRALE

Seien φ, ψ äquivalente, glatte Jordanwege zur Kurve $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\int_{\varphi} F(x) dx = \int_{\psi} F(x) dx \quad \forall F: \gamma \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

für die die Integrale existieren.

Beweis zu 8.4.3:

Nach 8.1.7 existiert eine streng monoton wachsende, stetig diffbare Funktion h mit $\psi \circ h = \varphi$ und $h' \neq 0$. Der Parameterbereich von φ sei I , der von ψ sei J . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} F(x) dx &= \int_I F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_I F(\psi(h(t))) \cdot \frac{d}{dt}(\psi(h(t))) dt \\ &= \int_I F(\psi(h(t))) \cdot \psi'(h(t)) h'(t) dt \\ &\stackrel{\text{Subst. } \tau:=h(t)}{=} \int_J F(\psi(\tau)) \cdot \psi'(\tau) d\tau = \int_{\psi} F(x) \cdot dx \end{aligned}$$

□

Korollar 8.4.4: WEGINTEGRAL DER GEGENSÄTZLICHEN ORIENTIERUNG

Seien $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\psi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatte Jordanwege zur Kurve γ , wobei $\psi \sim \varphi^-$. Dann gilt:

$$\int_{\varphi} F(x) \cdot dx = - \int_{\psi} F(x) \cdot dx \quad \forall F: \gamma \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

für die das Integral existiert.

Beweis zu 8.4.4:

Wir gehen analog zu oben vor (mit $I := [a, b]$, $J := [c, d]$), jedoch ist nun h streng monoton fallend. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} F(x) \cdot dx &= \int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^b F(\psi(h(t))) \cdot \psi'(h(t)) h'(t) dt \\ &\stackrel{\text{Subst. } \tau:=h(t)}{=} \int_d^c F(\psi(\tau)) \cdot \psi'(\tau) d\tau = - \int_c^d F(\psi(\tau)) \cdot \psi'(\tau) d\tau \\ &= - \int_{\psi} F(x) \cdot dx \end{aligned}$$

□

Satz 8.4.5:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet und $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.

Für alle folgenden Wege gelte, dass sie rektifizierbar, Jordan'sch und stückweise stetig diffbar sind, sowie in G verlaufen ($\gamma \subseteq G$).

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) F ist ein **Gradientenfeld**, d.h. $\exists V \in C^{(1)}(G) : F = \nabla V$

(2) Alle Wegintegrale von F sind wegunabhängig.

$$\int_{\varphi} F(x) \cdot dx \text{ hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.}$$

(3) Integrale von F über geschlossene Wege verschwinden stets:

$$\oint_{\varphi} F(x) \cdot dx = 0$$

Gelten diese Aussagen, gilt für $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = \nabla V$:

$$\int_{\varphi} F(x) \cdot dx = V(\varphi(b)) - V(\varphi(a))$$

Man schreibt dann auch

$$\int_{\xi}^{\eta} F(x) \cdot dx := \int_{\varphi} F(x) \cdot dx$$

wenn $\varphi(a) =: \xi$, $\varphi(b) =: \eta$.

Beweis zu 8.4.5:

(1) \Rightarrow (2): Sei $F = \nabla V$. Also gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} F(x) \cdot dx &= \int_a^b F(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_a^b \underbrace{(\nabla V)}_{\substack{\text{äußere} \\ \text{Abl.}}}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} V(\varphi(t)) dt \stackrel{\text{HDSI}}{=} V(\varphi(t)) \Big|_a^b = V(\varphi(b)) - V(\varphi(a)) \end{aligned}$$

(2) \Rightarrow (3): Nach Korollar 8.4.4 gilt: $\int_{\varphi} F \cdot dx = - \int_{\varphi^-} F \cdot dx$.

Wegen (2):

$$\oint_{\varphi} F \cdot dx = \oint_{\varphi^-} F \cdot dx \Rightarrow \oint_{\varphi} F \cdot dx = 0$$

(3) \Rightarrow (2) Seien $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Wege mit $\varphi(a) = \psi(c)$ und $\varphi(b) = \psi(d)$.

Wir hängen nun ψ^- an φ an:

$$\Phi(t) := \begin{cases} \varphi(a + t(b-a)) & 0 \leq t \leq 1 \\ \psi(d + (t-1)(c-d)) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Man schreibt häufiger auch $\varphi \oplus \psi^-$.

Offensichtlich ist

$$\oint_{\Phi} F \cdot dx = \int_{\varphi} F \cdot dx + \int_{\psi^-} F \cdot dx$$

Wegen (3) gilt:

$$\begin{aligned} \oint_{\Phi} F \cdot dx &= 0 \\ \Rightarrow \int_{\varphi} F \cdot dx &= - \int_{\psi^-} F \cdot dx \stackrel{8.4.4}{=} \int_{\psi} F \cdot dx \end{aligned}$$

(2) \Rightarrow (1) Sei $\xi \in G$ fest. Wir definieren $V : G \rightarrow \mathbb{R}$ durch $V(x) := \int_{\xi}^x F(y) \, dy$, $x \in G$.

Für hinreichend kleine $h \in \mathbb{R}^n$ gilt dann (mit $x^{(0)} \in G$):

$$V(x^{(0)} + h) = \int_{\xi}^{x^{(0)}+h} F(y) \cdot dy = \underbrace{\int_{\xi}^{x^{(0)}} F(y) \cdot dy}_{=V(x^{(0)}) \text{ per Def.}} + \int_{x^{(0)}}^{x^{(0)}+h} F(y) \cdot dy$$

Ferner gilt (z.B. durch Parametrisierung der Strecke von $x^{(0)}$ nach $x^{(0)} + h$ mit $\varphi(t) = x^{(0)} + th$, $t \in [0, 1]$):

$$\int_{x^{(0)}}^{x^{(0)}+h} F(x^{(0)}) \cdot dy = \int_0^1 F(x^{(0)}) \cdot h \, dt = F(x^{(0)}) \cdot h$$

Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|h|} |V(x^{(0)} + h) - V(x^{(0)}) - F(x^{(0)}) \cdot h| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{x^{(0)}}^{x^{(0)}+h} F(y) \cdot dy - \int_{x^{(0)}}^{x^{(0)}+h} F(x^{(0)}) \cdot dy \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{x^{(0)}}^{x^{(0)}+h} (F(y) - F(x^{(0)})) \cdot dy \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_0^1 (F(x^{(0)} + th) - F(x^{(0)})) \cdot h \, dt \right| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ugl. Int.}}{\leq} \frac{1}{|h|} \int_0^1 |F(x^{(0)} + th)| \cdot |h| \, dt \\ &\stackrel{\text{CSB}}{\leq} \frac{1}{|h|} \int_0^1 \max_{x \in \mathcal{K}_{|h|}(x^{(0)})} |F(x) - F(x^{(0)})| \cdot |h| \, dt \\ &= \max_{x \in \mathcal{K}_{|h|}(x^{(0)})} |F(x) - F(x^{(0)})| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \text{ da } F \text{ stetig.} \end{aligned}$$

$\Rightarrow V$ in $x^{(0)}$ diffbar und $\nabla V(x^{(0)}) = F(x^{(0)})$

□

Satz 8.4.6: INTEGRABILITÄTSBEDINGUNGEN

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F \in C^{(1)}(G, \mathbb{R}^n)$.

Ist F ein Gradientenfeld in G , so gelten die Integrabilitätsbedingungen:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \quad \forall i, k \in \underline{n}$$

Beweis zu 8.4.6:

Sei $F = \nabla V$, d.h. $F_i = \frac{\partial}{\partial x_i} V$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} V = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} V = \frac{\partial}{\partial x_i} F_k$$

nach dem Satz von Schwarz, da $F \in C^{(1)}(G, \mathbb{R}^n) \Rightarrow V \in C^{(2)}(G)$.

□

Bemerkung 8.4.7:

- Es reicht *offensichtlich*, die Integrabilitätsbedingung für $i < k$ zu prüfen.
- Im \mathbb{R}^3 ist die Integrabilitätsbedingung äquivalent zu $\text{rot} F = 0$.
- Die Umkehrung gilt nicht. Die Integrabilitätsbedingung ist *notwendig*, aber nicht *hinreichend* für ein Gradientenfeld.

Gegenbeispiel zu c):

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

f erfüllt die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, ist aber kein Gradientenfeld.
Siehe auch 7.3.Ü1.

Ein Satz als Einschub:

Satz 8.4.8:

Seien I, J Intervalle in \mathbb{R} , I kompakt, J offen, $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell diffbar.
Definiere $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass

$$F(y) := \int_I f(x, y) dx \text{ für } y \in J$$

$\Rightarrow F$ stetig diffbar und $F'(y) = \int_I \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx \quad \forall y \in J$.

d.h. Differentiation und Integration nach verschiedenen Variablen dürfen vertauscht werden.

Beweis zu 8.4.8:

Sei $\bar{y} \in J$. J offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \bar{U} := [\bar{y} - \varepsilon, \bar{y} + \varepsilon] \subseteq J$.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ ist stetig, $I \times \bar{U}$ kompakt.

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{I \times \bar{U}}$ gleichmäßig stetig (stetig auf Kompaktum).

Sei $(h_k)_k$ eine Nullfolge mit $h_k \neq 0 \quad \forall k$. Wir müssen $\frac{F(\bar{y}+h_k) - F(\bar{y})}{h_k}$ für $k \rightarrow \infty$ untersuchen.

$$\frac{f(x, \bar{y} + h_k) - f(x, \bar{y})}{h_k} \stackrel{\text{MWS DIFF}}{\underset{\exists \eta_k, |\eta_k| < |h_k|}{\approx}} \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y} + \eta_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y}), \text{ da } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig.}$$

Wegen gleichmäßiger Stetigkeit ist diese Konvergenz auch gleichmäßig. Also gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\bar{y} + h_k) - F(\bar{y})}{h_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_I \frac{f(x, \bar{y} + h_k) - f(x, \bar{y})}{h_k} dx \\ &\stackrel{\text{gliedw. Integration}}{=} \int_I \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x, \bar{y} + h_k) - f(x, \bar{y})}{h_k} dx = \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y}) dx \quad \forall \bar{y} \in J \end{aligned}$$

□

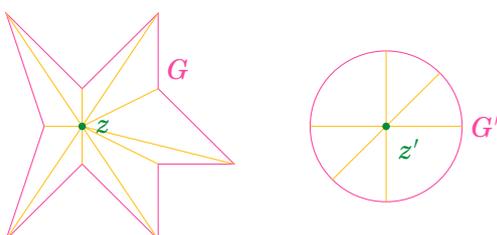
Für die Umkehrung von 8.4.6 braucht man eine Zusatzbedingung an den Definitionsbereich G :
Eine mögliche Bedingung derart ist, dass G *sternförmig* ist.

Definition 8.4.9: STERNFÖRMIGES GEBIET

Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig** (*star-shaped*), wenn es einen Punkt $z \in G$ gibt, sodass

$$\overline{zx} \subseteq G \quad \forall x \in G$$

Man sagt dann auch „ G ist bzgl. z sternförmig“ oder „ z ist **Sternpunkt** von G “.



Satz 8.4.10:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und $F \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ eine Funktion, die die Integrabilitätsbedingung erfüllt.
Dann ist F ein Gradientenfeld (*hinreichende* Bedingung).

Beweis zu 8.4.10:

Wegen $\frac{\partial}{\partial x_k}(F_i(x-z)) = \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \cdot 1$ ändert sich die Integrabilitätsbedingung nicht, wenn das Koordinatensystem verschoben wird.

Sei also o.B.d.A. $z = 0$ ein Sternpunkt. Sei nun $x \in G$ fest, aber beliebig, und $\varphi_x(t) := tx$, $t \in [0, 1]$ eine Parametrisierung von $\overline{0x}$. (Diese Strecke existiert wegen der Sternförmigkeit.)

Wir setzen somit $V(x) := \int_{\varphi_x} F(y) \cdot dy$ für jedes $x \in G$.

Es gilt:

$$V(x) = \int_0^1 F(tx) \cdot x \, dt$$

Ferner gilt (wollen wir später benutzen):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k}(x \cdot F(tx)) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^n x_j F_j(tx) \right) = \sum_{j=1}^n \left(\delta_{jk} F_j(tx) + x_j \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(tx) t \right) \\ &\stackrel{\text{Int.bed.}}{=} F_k(tx) + \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(tx) t \\ &= F_k(tx) + t(\nabla F_k) \cdot x \\ &\stackrel{\substack{\text{Kettenregel} \\ \text{rückwärts}}}{=} \frac{\partial}{\partial t}(t F_k(tx)) \end{aligned}$$

Nach 8.4.8 gilt somit:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} V(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \int_0^1 F(tx) \cdot x \, dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_k} (F(tx) \cdot x) \, dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (t F_k(tx)) \, dt \stackrel{\text{HSDI}}{=} t F_k(tx) \Big|_{t=0}^{t=1} = F_k(x)$$

$\Rightarrow F = \nabla V$ □

Beispiel 8.4.11:

a) Gravitationskraft eines Massenpunktes im Ursprung:

$$F(x) = -\gamma \cdot \frac{mM}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

- γ : Gravitationskonstante
 M : Masse des Massenpunkts
 m : Masse im Gravitationsfeld
 x : Vektor von Massenpunkt M zu Masse m

Das zugehörige Potenzial (im physikalischen Sinne) ist:

$$V(x) := -\gamma M \frac{1}{|x|}$$

sodass $F(x) = -m \nabla V$.

$\Rightarrow \operatorname{rot} F = 0$

Aber: $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist nicht sternförmig!

d.h.: Es gibt auch Gradientenfelder auf nicht-sternförmigen Gebieten (hinreichende Bedingung, nicht notwendig).

Nach 8.4.5 hängt die Arbeit, die im Gravitationsfeld verrichtet wird, nur vom Potenzial am Anfangs- und Endpunkt ab.

b) siehe Gegenbeispiel von 8.4.7.c).

$f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ kein Gradientenfeld, es erfüllt die Integrierbarkeitsbedingung, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht sternförmig.

Wir berechnen nun das Arbeitsintegral längs eines geschlossenen Weges $\varphi(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$:

$$\oint_{\varphi} f \cdot d(x, y) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 + \cos^2} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0$$

Aber: Beispielsweise $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ ist sternförmig. Damit ist $f|_H$ ein Gradientenfeld. Gemäß Beweis von 8.4.7 erhalten wir wie folgt eine Stammfunktion:

$$V(x, y) = \int_{(0,1)}^{(x,y)} f(\bar{x}, \bar{y}) d(\bar{x}, \bar{y})$$

Wegen der Wegunabhängigkeit: verwende Polygonzug $\overline{(1,0)(x,0)(x,y)}$.

1. TEIL: $\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1+t(x-1) \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 1]$

$$\Rightarrow \int_{\varphi} f \cdot d(\bar{x}, \bar{y}) = \int_0^1 \frac{1}{\dots} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

2. TEIL: $\psi(t) := \begin{pmatrix} x \\ ty \end{pmatrix}$, $t \in [0, 1]$

$$\Rightarrow \int_{\psi} f \cdot d(\bar{x}, \bar{y}) = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + (ty)^2} \begin{pmatrix} -ty \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \frac{xy}{x^2 + t^2 y^2} dt = \dots = \arctan \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow V(x, y) = \arctan \frac{y}{x} \text{ wenn } (x, y) \in H. V \text{ ist nicht stetig fortsetzbar auf } \overline{H}.$$

Ende des 2. Semesters.

Index

- Äquivalenz von Wegen, 66, 79
- Äquivalenzklasse, 65
- Äquivalenzrelation, 65
- äußerer Inhalt, 16

- Ableitung, 2
- Additivität, 20
- Arbeitsintegral, 78

- beschränkte Variation, 74
- Bogenlänge, 68

- Cauchy'scher Hauptwert, 32
- Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung, 22, 48
- charakteristische Funktion, 21

- Darstellungssatz von Jordan, 76
- Definitheit einer Matrix, 54
- Definitheit, 20
- Differentialgleichung, 14, 36, 37
- Differentialquotient, 2
- Differenzierbarkeit, 2, 11
- Dirac-Funktional, 18
- Dirichlet-Funktion, 17
- Divergenz, 42
- Dreiecksungleichung, 20, 67

- Einheitskugel, 58
- Einheitsvektor, 38
- elliptisches Integral, 70
- explizit darstellbar, 61
- Extrema mit Nebenbedingungen, 63
- extremal, 8
- Extremum, 8, 54

- Fourier-Reihen, 34
- Fraktale Geometrie, 71
- freies Optimierungsproblem, 54, 63

- Gamma-Funktion, 29
- Gebiet, 45
- geschlossen, 65
- geschlossener Jordan'scher Weg, 65
- glatt, 65
- Gradient, 42
- Gradientenfeld, 50, 80

- harmonisch, 42
- Hauptminoren, 54
- Hauptnormale, 72
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 24
- Heaviside-Funktion, 18
- Hessematrix, 47
- hierarchische Zerlegung, 16

- indefinit, 54
- Indikatorfunktion, 21
- innerer Inhalt, 16

- Integrabilitätsbedingung, 50, 81
- Integrabilitätskriterium, 18
- Integral-Restglied, 52
- Integralkriterium für Reihen, 32
- Integrand, 16

- Jacobi-Determinante, 39
- Jacobi-Matrix, 39
- Jacobian, 39
- Jensen'sche Ungleichung, 40
- Jordan'scher Weg, 65

- Kettenregel, 2, 48
- Kochkurve, 71
- komplexe Differenzierbarkeit, 11
- komplexe Integrierbarkeit, 21
- Krümmung, 72
- Krümmungsradius, 72
- Kreuzprodukt, 42
- Kurve, 65
- Kurvenintegral, 73
- Kurvenlänge, 68, 77

- L'Hôpital'sche Regel, 6
- Lagrange-Funktion, 63
- Lagrange-Multiplikator, 63
- Lagrange-Restglied, 7, 52
- Landau-Symbole, 39
- Laplace-Gleichung, 42
- Laplace-Operator, 42
- lineare Exzentrizität, 70
- lokal invertierbar, 58
- lokale Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe, 12
- lokales Maximum, 8, 54
- lokales Minimum, 8, 54

- Majorisieren, 31
- Maximierer, 8
- Minimierer, 8
- Minoren, 54
- Mittelwertsatz der Differentialrechnung, 4, 51
- Mittelwertsatz der Integralrechnung, 23
- Multiindizes, 52
- Multinomialsatz, 53

- Nabla-Operator, 42
- negativ definit, 54
- Niveauflächen, 64
- Normalenvektor, 58, 64, 72

- oberes Riemann-Integral, 16
- Operator, 35
- Orientierungen, 66, 79

- Parameterdarstellung, 65
- Partialbruchzerlegung, 27
- partielle Ableitung, 38
- partielle Differenzierbarkeit, 38
- Partielle Integration, 25

- Polarkoordinaten, 61
- Polygonzug, 45
- positiv definit, 54
- positiv semidefinit, 54
- Potenzial, 50
- Potenzreihenansatz:, 14
- Produktregel, 2
- punktierte Umgebung, 5

- Quotientenregel, 2

- regulär, 58, 65
- regulärer Punkt, 58
- rektifizierbar, 67
- Relation, 65
- Richtungsableitung, 43, 49
- Riemann-Integrabilitätskriterium, 16
- Riemann-Integral, 16
- Riemann-Integrierbarkeit, 16
- Riemann-Obersumme, 15
- Riemann-Stieltjes-Integral, 18, 76
- Riemann-Stieltjes-integrierbar, 18
- Riemann-Untersumme, 15
- Riemann-Zwischensumme, 19
- Rotation, 42

- Sattelpunkt, 8
- Satz über gliedweise Differentiation, 11, 34
- Satz über gliedweise Integration, 33
- Satz über implizite Funktionen, 61
- Satz von der inversen Abbildung, 60
- Satz von Rolle, 4
- Satz von Schwarz, 45, 46
- Satz von Taylor, 7, 52
- stückweise glatt, 65
- stückweise regulär, 65
- stückweise stetig diffbar, 65

- Stammfunktion, 24, 50
- Standardeinheitsvektor, 38
- sternförmig, 82
- Sternpunkt, 82
- stetig differenzierbar, 4
- Substitutionsregel, 25

- Tangente, 57, 72
- Tangentialeinheitsvektor, 72
- Tangentialhyperebene, 57
- Tangentialraum, 57
- Tangentialvektor, 72
- Tangentialvektoren, 57
- Taylorentwicklung, 7
- Taylorpolynom, 7
- Taylorreihe, 7, 12
- totale Differenzierbarkeit, 39
- Totalvariation, 74

- Umgebung, 5, 59
- Umkehrsatz, 60
- Unbestimmtes Integral, 26
- uneigentlich integrierbar, 28
- unteres Riemann-Integral, 16

- Variation, 74
- Vektorprodukt, 42
- verträgliche Normen, 59
- Volterra'sche Integralgleichung, 36

- Weg, 65
- Wegintegral, 78
- Weglänge, 67, 68

- Zerlegung, 15
- Zerlegungsnullfolge, 19
- zusammenhängend, 45

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

\arcsin	Arkussinus, inverse Funktion zu Sinus (\sin)
Δ	Delta, oder auch: Laplace-Operator
Δ -Ugl.	Dreiecksungleichung
∇	Nabla-Operator
\oint	Wegintegral auf geschlossenen Wegen
∂	'd' für partielle Ableitungen
e	Die Eulersche Zahl, $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
MWS DIFF	Mittelwertsatz der Differentialrechnung
MWS INT	Mittelwertsatz der Integralrechnung
AWP	Anfangswertproblem, siehe auch Differentialgleichung (DGL)
CSB	Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung
DGL	Differentialgleichung
diffbar	differenzierbar
HSDI	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
i.A.	im Allgemeinen
R.-intbar	Riemann-integrierbar
R.-S.-intbar	Riemann-Stieltjes-integrierbar