Analysis II

Alexander Köster, *Student der Universität Siegen*

30. Juli 2018

Eine Sammlung des zusammengefassten Vorlesungs- und Übungsstoffes einiger Themen der Analysis.

Eine Sammlung einiger Inhalte der Veranstaltungen der Analysis 2 im Sommersemester 2018 der Universität Siegen ohne Beweise.

Diese Sammlung wurde unabhängig von der Universität erstellt. Alles aus der Vorlesung, dem zugehörigen Skript und den zugehörigen Übungen, was nicht in dieser Zusammenfassung enthalten ist, ist dennoch wichtig für das Verständnis oder den Beweis der gegebenen Sätze.

Inhaltsverzeichnis

5 Eindimensionale Differentialrechnung

5.1 Ableitungen

Aus dem 1. Semester, **Analysis I**:

Definition 5.1.1: Differenzierbarkeit

Sei $f: D \to \mathbb{R}$, x_0 innerer Punkt von D.
f heißt in x_0 **differenzierbar** („diffbar"), falls $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert.

Dann heißt $f'(x_0) := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) := \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ **Ableitung** oder Differentialquotient von f in x_0.

Rechts-/linksseitig differenzierbar mit $\lim\limits_{h\to 0^+}$ bzw. $\lim\limits_{h\to 0^-}$.

Bezeichnung: $f'_+(x_0) := \frac{\mathrm{d}^+ f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ bzw. $f'_-(x_0) := \frac{\mathrm{d}^- f}{\mathrm{d}x}(x_0)$

Ist f diffbar $\forall x \in D$ (und D offen), so heißt f differenzierbar.

Sind Ableitungen diffbar (f „n-mal diffbar"), so ist $f^{(n)} := \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} := \left(f^{(n-1)}\right)'$ die **n-te Ableitung** von f.

Bemerkung 5.1.2: Differenzierbar auf abgeschlossenen Intervallen

Manchmal wird eine Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar genannt, wenn $f\big|_{]a,b[}$ diffbar ist und f in a rechtsseitig und in b linksseitig diffbar ist.

Satz 5.1.3: Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in D$. Dann ist f stetig in x_0. Die Umkehrung gilt i.A. *nicht*.

Analog: rechts-/linksseitig diffbar $\Rightarrow$ rechts-/linksseitig stetig.

Satz 5.1.4: Ableitungsregeln

Seien $f, g: D \to \mathbb{R}$ (rechts-/linksseitig) diffbar in $x_0 \in D$. Dann gilt:

a) **Linearität:** $f+g,\ f-g,\ \lambda f$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ sind (rechts-/linksseitig) diffbar in x_0, wobei $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$ und $(\lambda f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$.
b) **Produktregel:** $f \cdot g$ ist (rechts-/linksseitig) diffbar in x_0, wobei $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
c) **Quotientenregel:** Ist $\forall x \in D:\ g(x) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in x_0 (rechts-/linksseitig) diffbar und $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Satz 5.1.5: Kettenregel

Seien $f: D \to \mathbb{R}$ in x_0 diffbar und $g: f(D) \to \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ diffbar.
Dann ist $g \circ f: D \to \mathbb{R}$ in x_0 diffbar und $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Lemma 5.1.6: Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ streng monoton $\left|\begin{matrix}\text{fallend}\\ \text{steigend}\end{matrix}\right|$ und in $x_0 \in]a,b[$ diffbar, wobei $f'(x_0) \neq 0$.

Dann ist f^{-1} in $f(x_0)$ diffbar und $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Ende des 1. Semesters. Ab hier **Analysis II**.

Beispiel 5.1.7: Differenzierbarkeit von Polynomen

a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n \Rightarrow f_n'(x) = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$
$\Rightarrow$ Alle Monome und damit alle Polynome sind diffbar.

b) $f(x) := e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
e^x ist die einzige Funktion mit der Eigenschaft, ihre eigene Ableitung zu sein (außer Vielfache).

c) $f(x) := \arcsin x \overset{x \notin \{-1,1\}}{\Longrightarrow} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Für $x \in \{-1,1\}$ ist arcsin nicht diffbar.

d) $f(x) := \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ für $x \neq \frac{2n+1}{2}\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.
$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Liste wichtiger Ableitungen:

$f(x)$	x^n	e^x	$\log x = \ln x$	$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$f'(x)$	$\underbrace{nx^{n-1}}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$

für $n \in \mathbb{R}$ (Definitionsbereich beachten!)

Definition 5.1.8: Stetige Differenzierbarkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R},\ f : D \to \mathbb{R}$ diffbar und $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt f **stetig differenzierbar**.
Der Raum aller n-mal stetig diffbaren Funktionen auf D wird mit $C^{(n)}(D)$ bezeichnet.
Es gilt: $C(D) = C^{(0)}(D)$. Es ist $C^{(0)}(D) \supset C^{(1)}(D) \supset C^{(2)}(D) \supset \dots$ (siehe dazu später).

5.2 Zentrale Sätze

Satz 5.2.1: Satz von Rolle

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine auf $]a,b[$ diffbare und auf $[a,b]$ stetige Funktion, und es gelte $f(a) = f(b)$.
Dann gilt: $\exists \xi \in\ ]a,b[: f'(\xi) = 0$

Satz 5.2.2: Mittelwertsatz der Differentialrechnung („MWS Diff")

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ diffbar.

(1) **„1. MWS Diff"**

$$\Rightarrow \exists \xi \in\ ]a,b[: \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\text{Sekantensteigung}} = f'(\xi)$$

Beispiel: Eine durchschnittliche Geschwindigkeitsmessung impliziert, dass ein Auto diese Geschwindigkeit irgendwo im Messintervall mal gefahren sein muss.

(2) **„2. MWS Diff"**
Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ diffbar, $g'(x) \neq 0\ \forall x \in\ ]a,b[$.

$$\Rightarrow \exists \xi \in\ ]a,b[: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Korollar 5.2.3:

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ und diffbar auf $]a,b[$ und stetig auf $[a,b]$.

(i) $f'(x)=0\ \forall x\in\,]a,b[\,\Rightarrow f$ konstant
(ii) $f'(x)\geq 0\ \forall x\in\,]a,b[\,\Rightarrow f$ monoton steigend
(iii) $f'(x)>0\ \forall x\in\,]a,b[\,\Rightarrow f$ streng monoton steigend
(iv) $f'(x)\leq 0\ \forall x\in\,]a,b[\,\Rightarrow f$ monoton fallend
(v) $f'(x)<0\ \forall x\in\,]a,b[\,\Rightarrow f$ streng monoton fallend
(vi) f' beschränkt $\Rightarrow f$ Lipschitzsch

Definition 5.2.4: Umgebung

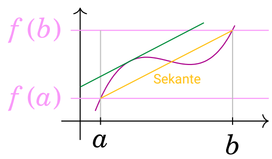
(i) $U\subseteq\mathbb{R}$ heißt **Umgebung** von
  a) $a\in\mathbb{R}$, falls eine ε-Umgebung $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ existiert, sodass $\mathcal{U}_\varepsilon(a)\subseteq U$
  b) $+\infty$, falls ein $a\in\mathbb{R}$ existiert, sodass $]a,+\infty[\,\subseteq U$
  c) $-\infty$, falls ein $a\in\mathbb{R}$ existiert, sodass $]-\infty,a[\,\subseteq U$

(ii) $U\in\mathbb{R}$ heißt **linksseitige** bzw. **rechtsseitige Umgebung** von $a\in\mathbb{R}$, falls

$$\exists\varepsilon>0:\,]a-\varepsilon,\ a]\subseteq U \text{ bzw. } [a,\ a+\varepsilon[\,\subseteq U$$

(iii) $U\in\mathbb{R}$ heißt **punktierte Umgebung** von a, falls eine ε-Umgebung $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ existiert, sodass $\mathcal{U}_\varepsilon(a)\setminus\{a\}\subseteq U$. Analog sind punktierte links-/rechtsseitige Umgebungen von a definiert.

Betrachte folgende Grenzwerte:



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{ax}},\quad a>0,\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$$

Zähler und Nenner $\longrightarrow+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}$$

Zähler $\longrightarrow-\infty$, Nenner $\longrightarrow+\infty$
Das ist ein Problem. Lösung (in den meisten Fällen):

Satz 5.2.5: L'Hôpital'sche Regel

Voraussetzung: Seien f,g auf einer (punktierten) (links-/rechtsseitigen) Umgebung U von $a\in\overline{\mathbb{R}}$ definiert und differenzierbar $g'(x)\neq 0$ in U. Sei ferner für $x\to a^{(+/-)}$:

I) $f(x)\longrightarrow 0,\ g(x)\longrightarrow 0$
II) $f(x)\longrightarrow\pm\infty,\ g(x)\longrightarrow\pm\infty$ (alle 4 Kombinationen)

Behauptung: Wenn $\lim\limits_{x\to a^{(+/-)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=:A\in\overline{\mathbb{R}}$ existiert, dann existiert $\lim\limits_{x\to a^{(+/-)}}\frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim\limits_{x\to a^{(+/-)}}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

Beispiel 5.2.6: L'Hôpital

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$; $f(x) := \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$

$g(x) := \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x)$ existiert und $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$ existiert.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{ax}}$; $a > 0,\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ f(x) := x^n,\ g(x) := e^{ax} \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1},\ g'(x) = ae^{ax}$

$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x\to\infty} ?$ „$\frac{\infty}{\infty}$" Deswegen leiten wir weiter ab:

$$f^{(n)}(x) = n!,\ g^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n!}{a^n e^{ax}} = 0$ existiert

$\overset{\text{L'Hôpital}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = 0$ existiert $\overset{\text{L'Hôpital}}{\Longrightarrow} \dots \overset{\text{L'Hôpital}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ existiert

Satz 5.2.7: Satz von Taylor

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $(n+1)$-mal diffbar; $x_0, x \in [a,b]$ mit $x_0 \neq x$.
$\Rightarrow \exists \xi \in \,]\min\{x_0,x\},\ \max\{x_0,x\}[\, :\ f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n,\xi}(x)$, d.h.:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n,\xi}(x)$$

mit (z.B.) $R_{n,\xi}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (Restglied von Lagrange)

Das Restglied entspricht dem Fehler bei der Taylorentwicklung. Für eine beliebig oft diffbare Funktion f, für die $R_{n,\xi}(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ konvergiert, konvergiert das Taylorpolynom zur Taylorreihe, und ist die Potenzreihenentwicklung dieser Funktion (wegen dem Identitätssatz für Potenzreihen eindeutig).

Definition 5.2.8: Extrema

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. f hat in $x_0 \in \,]a,b[$ ein **lokales** | **Minimum** / **Maximum** |, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $\left|\begin{array}{l} f(x_0) \leq f(x) \\ f(x_0) \geq f(x) \end{array}\right|$ $\forall x$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$ gilt.

Oberbegriff für Max. und Min. ist **Extremum**. x_0 heißt **extremal** oder **lokaler** | **Minimierer** / **Maximierer** |.

Satz 5.2.9: Extrema durch Ableitungen

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar.

(i) Wenn $x_0 \in \,]a,b[$ extremal, so ist $f'(x_0) = 0$.

(ii) Wenn $f \in C^{(2)}[a,b]$ *und* $f'(x_0) = 0$, so gilt:
  a) Wenn $f''(x_0) > 0$, so ist f in x_0 lokal minimal.
  b) Wenn $f''(x_0) < 0$, so ist f in x_0 lokal maximal.

(iii) Wenn $f \in C^{(3)}[a,b]$ und $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, aber $f'''(x_0) \neq 0$, so hat f bei x_0 kein Extremum. x_0 heißt dann **Sattelpunkt**.

Bemerkung 5.2.10:

Allgemein gilt, wenn $f \in C^{(n+1)}[a,b]$, $f'(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$, $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$:

a) Ist $n+1$ gerade, so gilt:
   (a.1) $f^{(n+1)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ lokales Maximum bei x_0
   (a.2) $f^{(n+1)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ lokales Minumum bei x_0

b) Ist $n+1$ ungerade, so liegt kein lokales Extremum bei x_0 vor (x_0 Sattelpunkt).

Beispiel 5.2.11:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 \; \forall x \in \mathbb{R}$
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ **notwendig** für Extremum, d.h. $x_0 = 0$ ist ein Kandidat für Extremum.
   Hinreichend: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, hier: $f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum bei 0.

b) ...

Satz 5.2.12:

e ist irrational.

5.3 Folgen und Reihen von Funktionen II

Bemerkung 5.3.1: DIFFERENTIATION IN $\mathbb{C}$

$f : G \to \mathbb{C}$ mit $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, in $z_0 \in G$ diffbar, falls

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \text{ existiert } \left(=: f'(z_0)\right)$$

(d.h. in komplexer Metrik: $d(z,w) = |z-w| = \sqrt{(z-w)(\overline{z}-\overline{w})}$)

Klar ist: f in $x_0 \in \mathbb{R}$ komplex diffbar $\Rightarrow f$ in x_0 (reell) diffbar ($h \to 0,\ h \in \mathbb{C}$ beinhaltet $h \to 0,\ h \in \mathbb{R}$)

Beispiel:

a) $f(z) = z^2$, $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \frac{z^2+2hz+z^2-z^2}{h} = 2z + h \xrightarrow{h \to 0} 2z \Rightarrow f$ komplex diffbar, $f'(z) = 2z$

b) $f(z) = |z|$. Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z_0 = re^{i\varphi}$, $r > 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi[$
   $f(z_0+h) - f(z_0) = |z_0+h| - |z_0|$
   Spezielle Annäherung für $h \to 0$: $z_0 + h_n := re^{i(\varphi + \frac{1}{n})}$
   Andere Annäherung: $z_0 + \tilde{h}_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)e^{i\varphi}$ d.h. $\tilde{h} := -\frac{1}{n}re^{i\varphi}$
   $\Rightarrow f$ in **keinem** $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex diffbar. Aber: f in $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ reell diffbar, nur in $z_0 = 0$ nicht.

Also: reell diffbar $\not\Rightarrow$ komplex diffbar.

Satz 5.3.2: SATZ ÜBER GLIEDWEISE DIFFERENTIATION

Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$.
Damit ist P im Inneren des Konvergenzkreises, d.h. $\forall z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r$, (komplex) diffbar, und es gilt:

$$P'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left((z-z_0)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1}$$

P' hat ebenfalls Konvergenzradius r.
Somit ist P im Inneren des Konvergenzkreises beliebig oft diffbar.

Beispiel 5.3.3: Gliedweise Differentiation

$P(z) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, Konvergenzradius $r = 1$.

$P'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\frac{z^{n-1}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ (geometrische Reihe)

Beachte: Konvergenz/Divergenz am Rand des Konvergenzkreises
z.B. P : Divergent bei $z = 1$ (harm. Reihe), Konvergent bei $z = -1$ (Leibniz); P' divergent bei $z = \pm 1$
d.h.: Randeigenschaften übertragen sich *nicht*.

Satz 5.3.4: Lokale Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe

Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, $(a < b)$, beliebig oft diffbar und $x_0 \in]a, b[$.
f heißt **lokal bei $x_0 \in \mathbb{R}$ in eine Potenzreihe entwickelbar**, wenn f eingeschränkt auf eine ε-Umgebung von x in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Es gilt:

(i) Falls $K, \delta \in \mathbb{R}^+$ existieren, sodass $|x - x_0| \le \delta$, so ist f bei x_0 lokal in eine Potenzreihe entwickelbar, für die der Konvergenzradius $\ge \delta$ ist. (d.h. $\exists (a_k) : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = f(x)\ \forall x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$)

(ii) Falls es ein $r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ gibt, sodass $f^{(r)} = f$, so ist f bei x_0 lokal in eine Potenzreihe entwickelbar.

(iii) (Verallgemeinerung von (ii))
Falls es ein $r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und reelle Zahlen $a_0, \ldots, a_{r-1}$ gibt, sodass $f^{(r)} = \sum_{j=0}^{r-1} a_j f^{(j)}$, dann ist f lokal bei x_0 in eine Potenzreihe entwickelbar.

Diese Potenzreihe ist in allen drei Fällen gegeben durch die **Taylorreihe**:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Nicht jede $C^{(\infty)}$-Funktion ist (lokal) in eine Potenzreihe entwickelbar (d.h. analytisch)!

Beispiel 5.3.5:

Sei $f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, f stetig in 0

$f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0 \Rightarrow f'(0) = 0$ und $\lim\limits_{h\to 0} f'(x) = 0$.
Allgemein: $f^{(n)}(x) := \frac{P(x)}{Q(x)} e^{-1/x^2}$; P, Q Polynome, $x \neq 0$ und $f^{(n)}$ (induktiv) und $f^{(n)}(0) = 0$ und $f^{(n)}(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$.
$\Rightarrow f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, d.h. beliebig oft diffbar, aber Taylorreihe um 0 wäre identisch 0 (∞ Nullstellen).
$\Rightarrow f$ ist nicht in 0 lokal in eine Potenzreihe entwickelbar, d.h. in keinen noch so kleinen Umgebungen.

(**Beachte:** Aus „$f'(x)$, $x \neq x_0$ gegeben“ und „$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ existiert“ folgt nicht generell die Diffbarkeit von f in x_0.)

Übung 5.3.Ü1:

GESUCHT: Potenzreihenentwicklung von $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{(1-x)^3}$.

Betrachte zunächst einmal:

$$f'(x)=(-1)(-3)\frac{1}{(1-x)^4}=\frac{3}{(1-x)^4}$$
$$f''(x)=(-1)(-4)\frac{3}{(1-x)^5}=\frac{12}{(1-x)^5}$$

Auffällig: Betrachte die geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\text{ mit }|x|<1\Leftrightarrow x\in\mathcal{K}_1(0)\text{ in }\mathbb{R}$$

Leite beide Seiten ab:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}x^n=(-1)(-1)\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$
$$\overset{\text{gliedw. Diff.}}{\Longleftrightarrow}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n=\frac{1}{(1-x)^2}$$
$$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$
$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}\text{ mit }x\in\mathcal{K}_1(0)$$

Leite erneut beide Seiten ab:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=(-1)(-2)\frac{1}{(1-x)^3}$$
$$\overset{\text{gliedw. Diff.}}{\Longleftrightarrow}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(n+1)x^n=\frac{2}{(1-x)^3}$$
$$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\frac{2}{(1-x)^3}\text{ mit }x\in\mathcal{K}_1(0)$$

⋮

Nun gilt:

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(1-x)^3}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+1)x^n$$
$$\overset{\text{unendl. Distributivgesetz}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n\text{ mit }x\in\mathcal{K}_1(0)$$

Damit ist dies eine Potenzreihenentwicklung für f um $x_0=0$.

Differentialgleichung:

$f'(x)=cf(x),\ c\in\mathbb{R}$ konstant.

Potenzreihenansatz: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$
Also: $f'=cf\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}ca_nnx^{n-1}$

Wegen Identitätssatz für Potenzreihen: $a_{n+1}(n+1)=ca_n\ \forall n\in\mathbb{N}_0$

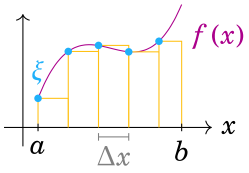
$\Longrightarrow a_n = a_0 \frac{c^n}{n!}$ Übung aus Analysis I.

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \frac{c^n}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cx)^n}{n!} = a_0 e^{cx}$$

a_0 frei wählbar (Anfangsbedingung).

→ Wachstums- oder Zerfallsprozesse.

6 Das Riemann-Integral in $\mathbb{R}^1$

	Mathematik (Leibniz)	**Physik (Newton)**
Problem:	Berechnung komplizierter Flächen	Berechnung Energie/Arbeit
Einfacher Fall:	Rechteck mit Seitenlängen a, b, Fläche $= a \cdot b$	Kraft konstant längs des Weges, Arbeit = Kraft · Weg
Komplizierter:	$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Funktion. Gesucht: Fläche zwischen Graph von f und x-Achse.	$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ skalares Kraftfeld entlang des 1-dimensionalen Weges $[a,b]$ Gesucht: Verrichtete Arbeit.
Idee:	Annäherung durch kleine (schmale) Rechtecke z.B. konst. Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ 	Unterteilung des Weges in kleine Stücke mit näherungsweise konstanter Kraft. Stücke: $\left[a + i\frac{b-a}{n},\ a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right] =: I_i$ (n Intervalle, $i \in \underline{n}$).
	Fläche des i-ten Rechtecks: $f(\xi_i) \cdot \Delta x$.	Arbeit für Teilstück I_i: $f_i \cdot \Delta x$; f_i = Kraft auf Teilstück I_i, $\approx f(\xi_i)$ für ein $\xi_i \in I_i$.
	Fläche $\approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x$	Gesamtarbeit $\approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x$

tatsächliche Fläche/Arbeit:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\xi_i^{(n)}\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

6.1 Definition & einfache Eigenschaften

Definition 6.1.1: Zerlegung und Riemann-Summen

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $I := [a,b]$, $a < b$.
$Z^{(n)} := \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\}$ sei **Zerlegung** von I, d.h. $a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = b$.

Für $j \in \underline{n}$ seien:

- $I_j^{(n)} := \left[x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)}\right]$
- $m_j^{(n)} := \inf\limits_{x \in I_j^{(n)}} f(x)$
- $M_j^{(n)} := \sup\limits_{x \in I_j^{(n)}} f(x)$
- $l_j^{(n)} := \left|I_j^{(n)}\right| = x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}$

Seien $m := \inf\limits_{x\in I} f(x)$; $M := \sup\limits_{x\in I} f(x)$; $\hat{M} := \sup\limits_{x\in I} |f(x)|$.

Riemann-Untersumme: $$s\left(Z^{(n)}\right) := \sum_{j=1}^{n} m_j^{(n)} l_j^{(n)}$$

Riemann-Obersumme: $$S\left(Z^{(n)}\right) := \sum_{j=1}^{n} M_j^{(n)} l_j^{(n)}$$

Betrachtet werden muss nun für *jedes* $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ *jede* Zerlegung $Z^{(n)}$, ähnlich Grenzwerte.

Lemma 6.1.2:

Es gilt:

a) $s\left(Z^{(n)}\right) \leq S\left(Z^{(n)}\right)\ \forall n \forall Z^{(n)}$

b) Ist eine Folge von Zerlegungen $\left(Z^{(n)}\right)_n$ **hierarchisch**, d.h. $Z^{(n)} \subseteq Z^{(n+1)}\ \forall n$, so gilt:

$$s\left(Z^{(n)}\right) \leq s\left(Z^{(n+1)}\right) \overset{\text{a)}}{\leq} S\left(Z^{(n+1)}\right) \leq S\left(Z^{(n)}\right)\ \forall n$$

und somit (Monotoniekriterium für Folgen) sind die Folgen $\left(s\left(Z^{(n)}\right)\right)_n$ und $\left(S\left(Z^{(n)}\right)\right)_n$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} s\left(Z^{(n)}\right) \leq \lim\limits_{n\to\infty} S\left(Z^{(n)}\right)$.

Definition 6.1.3: Riemann-Integrale

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt, $s\left(Z^{(n)}\right)$, $S\left(Z^{(n)}\right)$ die Ober-/Untersumme zu f.

a) $\sup\left\{s\left(Z^{(n)}\right) \mid Z^{(n)} \text{ Zerlegung von } [a,b],\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\right\} =: \underline{\mathfrak{J}} =: \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$

heißt **unteres Riemann-Integral** von f oder **innerer Inhalt** von f.

$\inf\left\{s\left(Z^{(n)}\right) \mid Z^{(n)} \text{ Zerlegung von } [a,b],\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\right\} =: \overline{\mathfrak{J}} =: \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$

heißt **oberes Riemann-Integral** von f oder **äußerer Inhalt** von f.

Betrachtet werden für **jedes** $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ *alle* Zerlegungen $Z^{(n)}$!

Nicht verwechseln: $\mathfrak{J}$ ist ein Fraktur-„I“, kein „J“!

b) f heißt **auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar** („R.-intbar“ oder „intbar“ solange wir noch kein anderes Integral kennen), falls

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dann heißt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

das **Riemann-Integral** von a bis b über f bzgl. x. Dann heißt f **Integrand**.

Achtung: Wir benutzen nirgendwo Beträge. „Flächeninhalt unter dem Graphen“ gilt also nur *über* der x-Achse.

Lemma 6.1.4: Riemann-Integrabilitätskriterium

Für $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ gilt: f ist auf $[a,b]$ R-intbar $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0: \exists$ Zerlegung Z von $[a,b]: S(Z)-s(z)<\varepsilon$

Beispiel 6.1.5: Riemann-Integrierbarkeit

a) **„Derichlet-Funktion“**

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \text{ rational} \\ 1 & x \text{ irrational} \end{cases} \qquad x \in [0,1]$$

Sei $Z^{(n)}$ beliebige Zerlegung zu beliebigem n, in $I_j^{(n)} := [x_{j-1}, x_j]$ existieren rationale und irrationale Zahlen. $m_j^{(n)} = 0,\ M_j^{(n)} = 1$,

$$s\left(Z^{(n)}\right) = \sum_{j=1}^{n} m_j^{(n)} l_j^{(n)} = 0,$$

$$S\left(Z^{(n)}\right) = \sum_{j=1}^{n} M_j^{(n)} l_j^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} l_j^{(n)} = |[0,1]| = 1$$

$$\underline{\mathfrak{I}} = 0,\ \overline{\mathfrak{I}} = 1$$

$\Rightarrow f$ nicht R.-intbar.
„Nr.1-Beispiel“ für nicht R-intbar.

b) $f(x) = x,\ x \in [0,1]$
Sei $Z^{(n)}$ eine beliebige Zerlegung, n beliebig.

$$s\left(Z^{(n)}\right) = \sum_{j=1}^{n} m_j^{(n)} l_j^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f\left(x_{j-1}^{(n)}\right)}_{=x_j^{(n)}} l_j^{(n)}$$

$$S\left(Z^{(n)}\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j^{(n)} \left(x_j^{(n)} - x_{j-1}^{n}\right) \text{ analog}$$

Spezielle Zerlegungsfolge: $x_j^{(n)} := \frac{j}{n},\ j \in \{0,1,\dots,n\}$

$$\Rightarrow s\left(Z^{(n)}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(j-1)(j-(j-1)) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(j-1) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1} j \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{(n-1)(n-1+1)}{2n^2}$$

$$= \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$S\left(Z^{(n)}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j(j-(j-1)) = \frac{n(n+1)}{n^2\cdot 2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Also: $s\left(Z^{(n)}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2},\ S\left(Z^{(n)}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

Definition 6.1.6:

Alles wie oben, jedoch: Sei $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktion.

$$l_j^{(n)} := \sigma\left(x_j^{(n)}\right) - \sigma\left(x_{j-1}^{(n)}\right)$$

(d.h. obiger Fall ist Spezialfall)
Wenn $\underline{\mathfrak{I}} = \overline{\mathfrak{I}}$, dann heißt f bzgl. σ **Riemann-Stieltjes-integrierbar** („R.-S.-integrierbar“), und

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) := \underline{\mathfrak{I}} = \overline{\mathfrak{I}} \text{ heißt } \textbf{Riemann-Stieltjes-Integral}.$$

Lemma 6.1.4 gilt auch für R.-S.-Integrale.

Beispiel 6.1.7: Heaviside/Dirac

$f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben, $\sigma(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$.

$l_j^{(n)} = \sigma\left(x_j^{(n)}\right) - \sigma\left(x_{j-1}^{(n)}\right)$ ist nur $\neq 0$, wenn $x_{j-1}^{(n)} < 0 \leq x_j^{(n)}$, dann $l_j^{(n)} = 1$.
Sei $\tilde{j}$ dieser Index. $s\left(Z^{(n)}\right) = m_{\tilde{j}}^{(n)} l_{\tilde{j}}^{(n)} = m_{\tilde{j}}^{(n)}$, $S\left(Z^{(n)}\right) = M_{\tilde{j}}^{(n)}$
Sei f stetig in 0. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : (|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, betrachte Zerlegung $Z^{(n)}$ mit $l_{\tilde{j}}^{(n)} = \left|I_{\tilde{j}}^{(n)}\right| < \delta(\varepsilon)$.

$$\Rightarrow f(0) - \varepsilon \leq m_{\tilde{j}} = s\left(Z^{(n)}\right) \leq S\left(Z^{(n)}\right) = M_{\tilde{j}}^{(n)} \leq f(0) + \varepsilon$$
$$\Rightarrow 0 \leq S\left(Z^{(n)}\right) - s\left(Z^{(n)}\right) \leq f(0) + \varepsilon - (f(0) - \varepsilon) = 2\varepsilon$$

$\Rightarrow f$ ist R.-S.-intbar (Integrabilitätskriterium).

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, \mathrm{d}\sigma(x) = f(0)$$

Geht auch allgemeiner: Sei $a < x_0 < b$, $\sigma(x) := \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ 1 & x \geq x_0 \end{cases}$

$$\delta_{x_0} : \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ stetig in } x_0\} \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}\sigma(x) = f(x_0)$$

Man kann eine Metrik für diesen Raum definieren.

Man nennt $\delta_{x_0}(f) = f(x_0)$ das **Dirac-Funktional**.

(Nennt man **Operatoren** (Abb. metr. Raum → metr. Raum) oder **Funktional** (Abb. norm. Raum → norm. Raum). → Approximationstheorie, Physik (Elektrodynamik, Quantenmechanik), ...)

Satz 6.1.8: Weitere Integrabilitätskriterien

a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f Riemann-integrierbar auf $[a,b]$.
Ist zusätzlich $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, dann ist f R.-S.-intbar.
b) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f R-intbar auf $[a,b]$.
Ist zusätzlich $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und stetig, so ist f R.-S.-intbar.

Ab jetzt: $\sigma(x) = x$. Also:

$$f \text{ diffbar auf } [a,b] \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f \text{ stetig auf } [a,b] \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f \text{ R.-intbar}$$

z.B.: $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ $\quad f : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lfloor x \rfloor$

Bzgl. der Gaußklammer: $[x] := \lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$ „abrunden“, unstetig in 0.

Sei Z Zerlegung von $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, sei $I_{\tilde{j}}$ das Intervall mit der Eigenschaft, dass $x_{\tilde{j}-1} < 0 \leq x_{\tilde{j}}$. $\Rightarrow M_{\tilde{j}} = 0,\ m_{\tilde{j}} = -1$.
Für alle anderen Intervalle ist f konstant ($M_j = m_j$).

$$\Rightarrow S(Z) - s(Z) = (0 - (-1)) \cdot l_{\tilde{j}} = l_{\tilde{j}}$$

Durch Verfeinerung der Zerlegung kann $l_{\tilde{j}}$ beliebig klein werden. Wegen dem Integrabilitätskriterium (Lemma 6.1.4): f R-intbar auf $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Aber eben unstetig in 0.

Alternativ: $\lfloor x \rfloor$ ist monoton wachsende Funktion. $\Rightarrow$ R.-intbar.

Definition 6.1.9: Riemann-Zwischensumme

a) Eine Folge $\left(Z^{(n)}\right)_n$ von Zerlegungen vom Intervall I heißt **Zerlegungsnullfolge**, falls

$$\delta\left(Z^{(n)}\right) := \max_j l_j^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(n muss nichts mit der Anzahl der Punkte zu tun haben, $Z^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}\right)$)

b) Sei $I := [a,b]$, $f : I \to \mathbb{R}$, Z eine beliebige Zerlegung von I, $\xi_i \in I_i$ für $i \in \underline{n}$ beliebige Punkte.

$$S(Z;\, \xi_1, \ldots, \xi_n) := \sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_j\right) l_j$$

heißt **Riemann-Zwischensumme**.

Satz 6.1.10: (Definition nach Riemann)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.
Dann gilt: f ist auf $[a,b]$ R.-intbar genau dann, wenn $\forall$ Zerlegungsnullfolge $\left(Z^{(n)}\right)_n$ und jede Wahl passender Zwischenpunkte $\xi^{(n)} \in \mathbb{R}^{k_n}$ die Folge der Riemann-Zwischensummen konvergent ist.
In diesem Fall konvergieren die R.-Zwischensummen alle gegen den gleichen Grenzwert: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (gilt analog auch für R.-S.-Integral).

Satz 6.1.11: Eigenschaften des Riemann-Integrals

Seien f, g R.-intbar auf $I := [a,b]$. Dann gilt:

a) **Linearität:** $\alpha f + \beta g$ sind R.-intbar $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

b) **Positivität:** Wenn $f \geq 0$ auf $[a,b]$, so ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

c) **Monotonie:** Wenn $f \leq g$ (d.h. $f(x) \leq g(x)\ \forall x$), dann ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

d) **Dreiecksungleichung** für Integrale: $|f|$ ist R.-intbar und

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

e) **Additivität** des Integrals (bzgl. des Integrationsbereichs):
Sei $a < c < b$. $\Rightarrow f$ auf $[a,c]$ und $[c,b]$ R.-intbar und

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

f) **Definitheit:** Wenn $f \geq 0$, f stetig auf I und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, dann gilt: $f = 0$ (d.h. $f(x) = 0\ \forall x$).

Definition 6.1.12: Umkehren der Integrationsgrenzen

Sei $a < b,\ c \in [a,b],\ f$ R.-intbar auf $[a,b]$.

- $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x := 0$

Grund: Erhält die Additivität. Aber **Achtung:** Monotonie gilt dabei nicht.

Bemerkung 6.1.13: Integral für komplexwertige Funktion

Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R},\ f : [a,b] \to \mathbb{C}$.
In $\mathbb{C}$ gibt es keine Ordnung mehr, daher keine Ober-/Untersummen. Daher: Zwischensummen + GWS.
f ist (komplex) R.-intbar genau dann, wenn $\mathrm{Re} f$ und $\mathrm{Im} f$ (reell) R.-intbar sind. Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re} f(x)\,\mathrm{d}x \ + \mathrm{i} \cdot \int_a^b \mathrm{Im} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Lemma 6.1.14:

a) Seien f, g R.-intbar, $f(x) = g(x)\ \forall x \in D,\ D$ dicht in I.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

b) Sei f R.-intbar, $h : f(I) \to \mathbb{R}$ glm. stetig. Dann ist $h \circ f : I \to \mathbb{R}$ R.-intbar.
c) Sei f R.-intbar, außerdem $|f(x)| \geq \delta > 0\ \forall x \in I. \Rightarrow \frac{1}{f}$ R.-intbar.
   Forderung $|f| \geq \delta > 0$, damit $1/f$ beschränkt ist durch $1/\delta$.
d) Seien f, g R.-intbar. $\Rightarrow f \cdot g,\ \max(f,g) = \min(f,g)$ R.-intbar.

Übung 6.1.Ü1:

Sei $I := [a,b],\ f : I \to \mathbb{R}$ R.-intbar.
Dann ist $F : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ Lipschitzstetig.

Übung 6.1.Ü2: Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung (CSB)

Seien $f, g \in \mathrm{C}[a,b]$. Dann gilt:

$$\left(\int_a^b f(x) g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Dies ist ein Sonderfall von der CSB-Ungleichung für Skalarprodukte.

6.2 Zentrale Sätze

Satz 6.2.1: Mittelwertsatz der Integralrechnung

a) **„1. MWS Int."**
Wenn $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *stetig* ist, dann $\exists\xi\in I:=[a,b]:\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

b) **„2. MWS Int."**
Wenn $f:I\to\mathbb{R}$ *stetig* und $p:I\to\mathbb{R}$ R.-intbar und $p\geq 0$, dann $\exists\xi\in I$:

$$\int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

(1. MWS Int. ist Spezialfall $p(x)=1$ von 2. MWS Int.)

$\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ heißt **Integral-Mittelwert** von f.

Satz 6.2.2: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HSDI)

(1) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R.-intbar und stetig in $\xi\in[a,b]$.
$\Rightarrow F(x):=\displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ c\in[a,b],\ x\in[a,b]$ in ξ diffbar und $F'(x)=f(\xi)$.
(Somit: $f\in\mathrm{C}(I)\Rightarrow F\in\mathrm{C}^{(1)}(I)$; $f\in\mathrm{C}^{(k)}(I)\Rightarrow F\in\mathrm{C}^{(k+1)}(I),\ k\in\mathbb{N}$.)
F mit $F'=f$ heißt **Stammfunktion** von f.

(2) Sei $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig diffbar. $\Rightarrow F(b)-F(a)=\displaystyle\int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t$.

Allgemein für $x,c\in[a,b]$: $F(x)=F(c)+\displaystyle\int_c^x F'(t)\,\mathrm{d}t$.

Tabelle von Stammfunktionen:

$f=F'$	F (± Konstante)
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha-1},\alpha\neq-1$ bzw. $\ln\lvert x\rvert,\ \alpha=-1$

Die Differenzierbarkeitsordnung wird oft als Maßfür die „Glattheit" einer Funktion angesehen, d.h. Integrieren „glättet" eine Funktion und Ableiten „raut" eine Funktion auf.

Beispiel 6.2.3: HSDI

a) $\int_0^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\big|_0^{2\pi}=-\cos(2\pi)-(-\cos 0)=-1-(-1)=0$

b) $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac12 x^2\big|_0^1=\frac12 1^2-\frac12 0^2=\frac12$

d.h. man schreibt $F(x)\big|_a^b:=F(b)-F(a)$

Satz 6.2.4: Partielle Integration (*Integration by parts*)

Seien $u,v\in\mathrm{C}^{(1)}[a,b]$.

$$\Rightarrow\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel 6.2.5: Anwendungen partieller Integration

a) $$\int_a^x \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \int_a^x \underbrace{\sin(t)}_{u'(t)}\underbrace{\sin(t)}_{v(x)}\,\mathrm{d}t = \underbrace{-\cos(t)}_{u(t)}\underbrace{\sin(t)}_{v(t)}\Big|_a^x - \int_a^x \underbrace{-\cos(t)}_{u(t)}\underbrace{\cos(t)}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\cos(t)\sin(t)\Big|_a^x + \int_a^x \underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \int_a^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t = (-\cos(t)\sin(t)+t)\Big|_a^x - \int_a^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t \qquad \| + \textstyle\int_a^x \sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow 2\int_a^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t = (t-\cos(t)\sin(t))\Big|_a^x$$

$$\Rightarrow \int_a^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(t-\cos(t)\sin(t))\Big|_a^x \qquad \leftarrow \text{Stammfkt. von } \sin^2$$

b) $$\int_a^x \ln t\,\mathrm{d}t = \int_a^x \underbrace{1}_{u'(t)}\cdot\underbrace{\ln t}_{v(t)}\Big|_a^x - \int_a^x \underbrace{t}_{u(t)}\cdot\underbrace{\frac{1}{t}}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t = (t\cdot\ln t - t)\Big|_a^x$$

Satz 6.2.6: Substitutionsregel

Seien $g \in C^{(1)}[a,b]$, $f \in C^{(0)}(g([a,b]))$, $g'(x) \neq 0 \;\forall x \in\,]a,b[$.

$$\Rightarrow \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel 6.2.7: Anwendungen der Substitutionsregel

a) $\int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x = ?$, $f(t) := e^t$, $g(x) := 2x$, $f(g(x)) = e^{2x}$, $g'(x) = 2 \neq 0$ ✓

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 e^{2x}\cdot 2}_{\text{r.S. d. Subst.r.}} = \frac{1}{2}\int_{g(0)}^{g(1)} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^2 e^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot e^t\Big|_0^2 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$$

(Substitutionsregel von rechts nach links)

b) $\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = ?$, $f(t) := \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $y \in\,]0,1[$, $g(x) := \sin x$, $g'(x) = \cos x$

$g(a) = 0$, $g(b) = y \Rightarrow a = 0$, $b = \arcsin y$

$$f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|}$$

$$\Rightarrow \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\arcsin y}\frac{1}{\cos x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\arcsin y} 1\,\mathrm{d}x = \arcsin y$$

(Substitutionsregel von links nach rechts)

c) $\int_0^y \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = ?$, $f(t) := \frac{1}{1+t^2}$, $g(x) := \tan x$, $g'(x) = 1+\tan^2 x$

Offensichtlich ist $g' \neq 0$, da Quadrate immer positiv sind.

$$\int_0^y \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\tan(\arctan 0)}^{\tan(\arctan y)} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{Substitution}}{=} \int_{\arctan 0}^{\arctan y} \frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t = \int_{\arctan 0}^{\arctan y} 1\,\mathrm{d}t = t\Big|_{\arctan 0}^{\arctan y} = \arctan y$$

Definition 6.2.8: Unbestimmtes Integral

Sei f R.-intbar. Dann bezeichnet das sogenannte **unbestimmte (Riemann-)Integral**

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

die Menge aller Stammfunktionen von f.
Häufige Schreibweise: Wenn F eine Stammfunktion von f, schreibt man $\int f(x) = F(x) + \mathrm{const.}$

Beachte:

Beispiel 6.2.9:

$f(x) := \frac{1}{x^2},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$F(x) := \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + 27 & x > 0 \\ -\frac{1}{x} + \pi & x < 0 \end{cases}$ ist eine Stammfunktion von f.
Wie auch $\widetilde{F}(x) := \frac{1}{x},\ x \neq 0$.
d.h. $F(x) \neq \widetilde{F} + \mathrm{const.}$

Daher schreibt man oft auch eine Stammfunktion als Repräsentant. Das $+\mathrm{const.}$ stimmt für stückweise definierte Funktionen ohnehin nicht mehr, also kann man es auch weglassen, wenn der Zusammenhang klar ist.

Beispiel 6.2.10: Partialbruchzerlegung

Verfahren zur Integration rationaler Funktionen (d.h. Quotienten von Polynomen).
z.B. $\int \frac{1}{x^2+3x+2}$

- Faktorisierung des Nenners, soweit in $\mathbb{R}$ möglich:
  $x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$
- Betrachte Nenner als Hauptnenner von Brüchen mit Einzelfaktoren als Nenner:
  $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{(A+B)x+A+2B}{x^2+3x+2}$
- bestimme A und B: „Koeffizientenvergleich“
  $A + B = 0,\ A + 2B = 1 \overset{\text{LGS}}{\Longrightarrow} B = 1,\ A = 1$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{x+2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = -\ln|x+2| + \ln|x+1| + \mathrm{const}$$

Bei höherer Vielfachheit (d.h. $(x+c)^k,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$):
entweder $\frac{A_1}{x+c} + \frac{A_2}{(x+c)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x+c)^k}$ oder *ein* Summand: $\frac{B_0 + B_1 x + \cdots + B_{k-1}x^{k-1}}{(x+c)^k}$
sofern Zählergrad < Nennergrad.
Wenn Zählergrad ≥ Nennergrad: erst Polynomdivision.

Alternative zum Koeffizientenvergleich: **Einsetzmethode/Zuhaltetechnik**
Bsp.: $f(x) := \frac{8x+9}{(x+2)(x^2+6x+9)} = \frac{8x+9}{(x-2)(x+3)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$, n Unbekannte $(n = 3)$.

- Hauptnenner bilden, Zähler:
  $8x + 9 = A(x+3)^2 + B(x-2)(x+3) + C(x-2)$,
  zunächst $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$, durch stetige Fortsetzung $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Einsetzen von n Punkten, inkl. Nullstellen des Nenners
  $x = -3:\ -15 = C \cdot (-5) \Rightarrow C = 3$
  Wegen Nullstellenfaktoren fallen die anderen Unbekannten weg. Deshalb auch „Zuhalten“.
  $x = 2:\ 25 = A \cdot 25 \Rightarrow A = 1$

Wegen doppelter Nullstelle gibt es keinen dritten einfachen Punkt. Wähle zum Schluss „irgendeinen“ Punkt, der sich z.B. einfach berechnen lässt.

z.B. $x = 0: \ 9 = 9 + B \cdot (-6) + (-6) \Rightarrow B = -1$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+3} + \frac{3}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| - \ln|x+3| - \frac{3}{x+3} + \text{const.}$$

Folgende Terme können bei einer Partialbruchzerlegung allgemein auftauchen:

- x^k, $k \in \mathbb{N}$, $\int x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}x^{k+1}$
- $\frac{1}{(x-a)^k}$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, Substituiere $t = x - a$, $\int \frac{1}{t^k}\,\mathrm{d}t\ \ldots$
- $\frac{ax+b}{(x^2+2cx+d)^k}$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $c^2 < d$ $\rightarrow$ verschiedene Substitutionen (sofern möglich)

im Zweifelsfall konsultiert man Integraltabellen, z.B. Bronstein, Semendjajew.

Beispiel 6.2.11:

Sei h stetig diffbar auf $[a,b]$; Substitution $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(x) = h(x)$, $f(g(x)) = \frac{1}{h(x)}$

$$\int_a^b \frac{h'(x)}{h(t)}\,\mathrm{d}t \overset{\checkmark}{=} \int_{h(a)}^{h(b)} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t|\Big|_{h(a)}^{h(b)} = \ln|h(x)|\Big|_a^b$$

6.3 Uneigentliche Integrale

Definition 6.3.1: UNEIGENTLICH INTEGRIERBAR

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

a) Sei $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ auf $[a, c]$ $\forall c \in [a, b[$ R.-intbar.
f heißt **uneigentlich integrierbar** auf/über $[a, b[$ oder $[a, b]$, falls folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

dann: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

(Analog: $f :]a, b] \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x =: \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$)

b) Sei $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ R.-intbar auf $[a, c]$ $\forall c > a$.
f heißt **uneigentlich intbar** über $[a, +\infty[$, falls existiert:

$$\lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

dann: $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

c) Wenn $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ auf $]a, d]$ *und* auf $[d, b[$ für (mindestens) ein $d \in]a, b[$ uneigentlich intbar ist, so heißt f auf $]a, b[$ uneigentlich intbar und

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(praktisch wie Additvität)}$$

d) analog zu c): $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf $]-\infty, d]$ und $[d, +\infty[$ jeweils uneigentlich intbar für (mindestens) ein $d \in \mathbb{R}$. Dann heißt f auf $\mathbb{R}$ uneigentlich intbar und wir setzen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Bsp.: $\int_{-\infty}^{+\infty}$ Gaußsche Glockenfunktion $= \sqrt{\pi} \to$ Analysis III, Stochastik

e) Analog: $f : [a, b] \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ mit $x_0 \in]a, b[$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

falls beide uneigentlichen Integrale der rechten Seite existieren.

Beispiel 6.3.2: Uneigentliche Integrale

a) $f(x) := x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$ fest.

$$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| & \alpha = -1 \end{cases}$$

Sei $c > 0$:

$$\int_1^c x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}\left(c^{\alpha+1} - 1\right) & \alpha \neq -1 \\ \ln c - 0 & \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha+1} & \alpha < -1 \\ +\infty & \alpha \geq -1 \end{cases}$$

Also: x^α auf $[1, +\infty[$ (allg.: $[a, +\infty[,\ a > 0$) uneigentlich intbar $\Leftrightarrow \alpha < -1$.

$$\int_c^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}\left(1 - c^{\alpha+1}\right) & \alpha \neq -1 \\ -\ln c & \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} & \alpha > -1 \\ +\infty & \alpha \leq -1 \end{cases}$$

Also: x^α auf $]0, 1]$ (bzw. $]0, a],\ a > 0$)

- für $\alpha \geq 0$: „normal R.-intbar“,
- für $\alpha > -1$ uneigentlich intbar,
- für $\alpha \leq -1$ *nicht* (uneigentlich) intbar.

Somit: x^α auf $]0, +\infty[$ für *kein* $\alpha \in \mathbb{R}$ uneigentlich intbar ($\int_0^{+\infty} x^\alpha \,\mathrm{d}x = +\infty\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$).
Negativer Teil analog.

b) $\Gamma(t) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x) x^{t-1} \,\mathrm{d}x$ existiert für $t \geq 1$.
Es gilt: $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)\ \ \forall t \geq 1$ (Die Gamma-Funktion ist die Verallgemeinerung der Fakultät.)

Satz 6.3.3:

Sei $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind äquivalent:

a) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x) \,\mathrm{d}x$ existiert (d.h. $\in \mathbb{R},\ < +\infty$).

b) $\exists$ Stammfunktion F von f, sodass $\lim\limits_{c \to +\infty} F(c)$ existiert.

c) $\forall$ Stammfunktionen F von f existiert $\lim\limits_{c \to \infty} F(c)$.

Lemma 6.3.4:

Sei $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in [a, b]$, mit der Eigenschaft, dass $\forall$ Folge $(y_n) \subseteq [a, b]$ mit $y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} h(y_n)$ existiert.

$\Rightarrow$ Der Grenzwert von $h(y_n)$ ist für all solche Folgen der gleiche.

Analog: $h : [a, +\infty[\to \mathbb{R},\ y_n \longrightarrow \infty$ und $h :]-\infty, b] \to \mathbb{R},\ y_n \longrightarrow -\infty$

Satz 6.3.5:

Sei $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_0^+$ gegeben mit:

(i) $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ existiert (d.h. $\in \mathbb{R}$).

(ii) f auf $[a, c]$ intbar $\forall c \geq a$.

(iii) $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a, +\infty[$ („g majorisiert f“).

Dann existiert $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ (analog für $]a, b]$, $[a, b[$, $]-\infty, a]$).

Beispiel 6.3.6:

$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = ?$ Betrachte:

$$\lim_{c \to 0^+} \left(\int_{-1}^{-c} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_c^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \right) = \lim_{c \to 0^+} (\ln|-c| - \ln|-1| + \ln 1 - \ln c) = 0$$

Dies ist ein fehlerhafter Ansatz für uneigentliche Integrale!
Korrekt:

$$\lim_{a \to 0^+} \lim_{b \to 0^-} \left(\int_{-1}^{b} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_a^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \right) = \lim_{a \to 0^+} \lim_{b \to 0^-} \left(\underbrace{\ln|b|}_{\to -\infty} - \underbrace{\ln|-1|}_{=0} + \underbrace{\ln 1}_{=0} - \underbrace{\ln a}_{\to +\infty} \right)$$

$\to$ existiert nicht!

$\Rightarrow \frac{1}{x}$ ist *nicht* uneigentlich intbar auf $[-1, 1]$.

Definition 6.3.7: Cauchy'scher Hauptwert

Seien $a < x_0 < b$, $f : [a, b] \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$.
Falls der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

existiert, so wird er als **Cauchy'scher Hauptwert** (*Cauchy principal value*) des Integrals von f über $[a, b]$ bezeichnet.
Notationen:

$$\mathrm{CH}\!-\!\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{Hw}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{pv}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ist f auf $[a, x_0[$ und auf $]x_0, b]$ jeweils uneigentlich intbar, so besitzt f C.H. auf $[a, b]$.
Die Umkehrung i.A. gilt nicht! Siehe voriges Beispiel.

Satz 6.3.8: Integralkriterium für Reihen

Sei $f : [p, +\infty[\to [a, +\infty[$ monoton fallend, $p \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \sum_{n=p+1}^{\infty} f(n) \leq \int_p^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=p}^{\infty} f(n)$$

(Auch in dem Sinne, dass ein Teil $+\infty$ sein darf.)

Beispiel 6.3.9: Integralkriterium

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_p^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Übung 6.3.Ü1: Integralkriterium

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ konvergent?
Es gilt nach dem Integralkriterium:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\,\mathrm{d}x \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha} \le \int_1^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Trivialfall: Für $\alpha = 0$ gilt:
Sei $c \in \,]1, +\infty[$.

$$\int_2^c \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_2^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HSDI}}{=} \ln|c| - \ln|2| = \ln c - \ln 2 \xrightarrow{c\to\infty} +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha} = +\infty \text{ für } \alpha = 0$$

⋮

Für $\alpha = 0$ gilt:
Sei $c \in \,]e, +\infty[$.

$$\int_2^c \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_2^c \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x \underset{g(x):=\ln x}{\overset{\text{Substitution}}{=}} \int_{\ln 2}^{\ln c} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HSDI}}{=} \ln|x|\Big|_{\ln 2}^{\ln c} = \ln|\ln c| - \ln|\ln 2| \underset{\ln\nearrow}{\xrightarrow{c\to\infty}} +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha} = +\infty \text{ für } \alpha = 1$$

Sei nun also $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $c \in \,]1, +\infty[$.

$$\int_1^c \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_1^c \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(\ln x)^{-\alpha}}_{v(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{p.I.}}{=} \underbrace{\frac{\ln x}{(\ln x)^\alpha}}_{u(x)v(x)}\Big|_1^c - \int_1^c \underbrace{\ln x}_{u(x)} \cdot \underbrace{(-\alpha)(\ln x)^{-\alpha}}_{v'(x)}\,\mathrm{d}x = (\ln x)^{-\alpha+1}\Big|_1^c + \alpha \int_1^c \frac{1}{x}(\ln x)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x \qquad \| - \textstyle\int_1^c \dots$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha)\int_1^c \frac{1}{x}(\ln x)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = (\ln|c|)^{-\alpha+1} - (\ln|1|)^{-\alpha+1} \qquad \| \cdot \tfrac{1}{1-\alpha} \dots$$

$$\Leftrightarrow \int_1^c \frac{1}{x}(\ln x)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{(\ln c)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}$$

Bei $c \to +\infty$ gilt: $\ln c \longrightarrow +\infty$. Ist $\alpha < 1$, so steht $\ln c$ im Zähler. Ist $\alpha > 1$, steht $\ln c$ im Nenner.

$$\Rightarrow \int_1^c \frac{1}{x}(\ln x)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{c\to+\infty} \begin{cases} +\infty & \alpha < 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

Analog dazu ist $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}(\ln x)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = +\infty$ für $\alpha < 1$. $\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ konvergent $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

(Geht aber auch ohne Integralkriterium über Cauchy'schen Verdichtungssatz.)

6.4 Folgen und Reihen von Funktionen III

Satz 6.4.1: Satz über gliedweise Integration

Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, R.-intbar und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{C[a,b]} = 0$.

Dann ist auch f R.-intbar und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Auch hier wieder: Vertauschen von Grenzwerten (Integral ist auch Grenzwert).

Entsprechend für Reihen: Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ R.-intbar $\forall n$ und konvergiere $\sum_{n=0}^{N} f_n \xrightarrow{N\to\infty} f$ *gleichmäßig*.

$$\Rightarrow f \text{ R.-intbar und } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel 6.4.2: Fourier-Reihen

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx))$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < +\infty$ (l_1-Folge)

$\Rightarrow$ Fourier-Reihe ist *gleichmäßig* konvergent.

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k (-\cos(kt) + 1) \frac{1}{k} + b_k \cdot \frac{1}{k} \sin(kt) \right)$$

Korollar 6.4.3: Potenzreihenintegration

Potenzreihen dürfen im Inneren des Konvergenzkreises beliebig oft gliedweise integriert werden.

Satz 6.4.4: Satz über gliedweise Differentiation (verallgemeinert)

Seien $I := [a,b]$, $f_n : I \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, (punktweise) gegen $f : I \to \mathbb{R}$ konvergent, (f_n') *gleichmäßig* konvergent auf I.

$\Rightarrow f$ stetig diffbar auf I und $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)\ \forall x \in I$.

(d.h. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$) (analog für Reihen)

Übung 6.4.Ü1: Raum der stetig diffbaren Funktionen

$C^{(1)}[a,b]$ mit der Norm $\|f\|_{C^{(1)}[a,b]} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ für $f \in C^{(1)}[a,b]$ ist ein Banachraum.

6.5 Banachräume und Differentialgleichungen

Satz 6.5.1:

Der Operator $\Phi : C(I) \to C(I)$, gegeben durch

$$\Phi(f)(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ x \in I,\ f \in C(I), \quad \text{d.h. } \Phi(f) \in C(I),$$

ist linear und stetig (wegen HSDI sogar $C^{(1)}(I)$).

Ein **Operator** ist eine Abbildung von unendlich-dimensionalem Raum in unendlich-dimensionalem Raum.

Operatorennorm: $\|\Phi\| := \sup\limits_{\substack{g\in C(I)\\ g\neq 0}} \frac{\|\Phi(g)\|_{C(I)}}{\|g\|_{C(I)}} \le b - a$. → Funktionalanalysis

Anwendung 6.5.2: Differentialgleichung (DGL)

Anfangswertproblem (AWP) (*initial value problem*)**:**
$y' = \alpha y,\ \alpha \in \mathbb{R}^+$ konstant, $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ Funktion, hier: $[a,b] = [0, \frac{1}{2\alpha}] =: \tilde{I}$.
$y(0) := y_0$.
$\overset{\text{HDSI}}{\Longleftrightarrow} y(x) = y_0 + \alpha \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$ (**Volterra'sche Integralgleichung**)
Funktionalanalytische Formulierung:

$$T : \mathrm{C}(I) \to \mathrm{C}(I)$$

Für $f \in \mathrm{C}(I)$ mit $y = Ty$, d.h.: Wir suchen einen **Fixpunkt** von T. → Banach'scher Fixpunktsatz

- $\mathrm{C}(I)$ ist **vollständig** auf kompaktem I. ✓
- $Tf \in \mathrm{C}(I)\ \forall f \in \mathrm{C}(I)$ (**Selbstabbildung**). ✓
- **Kontraktion?**

$$f,g \in \mathrm{C}(I) \Rightarrow (Tf)(x) - (Tg)(x) = \alpha \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \ - \alpha \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\|Tf - Tg\|_{\mathrm{C}(I)} = \max_{x\in I} \left|\alpha \int_0^x f(t) - g(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \alpha \|f-g\|_{\mathrm{C}(I)} \cdot \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2}\|f-g\|_{\mathrm{C}(I)}$$

$\Rightarrow$ Kontraktion. ✓

$\Rightarrow \exists!$ Fixpunkt von $T \Leftrightarrow$ AWP hat genau eine Lösung.

Fixpunktiteration:
Wähle beliebigen Anfangswert, z.B. y_0 konstante Funktion. „0-te Näherung"
y_n n-te Näherung, Funktion! $y_n(x) = T(y_{n-1})(x) = y_0 + \alpha \int_0^x y_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$

$$y_1(x) = y_0 + \alpha \int_0^x y_0\,\mathrm{d}t = y_0 + \alpha y_0 x$$

$$y_2(x) = y_0 + \alpha \int_0^x y_1(t)\,\mathrm{d}t = y_0 + \alpha \int_0^x y_0 + \alpha y_0 t\,\mathrm{d}t = y_0 + \alpha y_0 x + \alpha^2 y_0 \frac{1}{2} x^2$$

$$y_3(x) = \cdots = y_0 + y_0\left(\alpha x + \alpha^2 \frac{1}{2}x^2 + \alpha^3 \frac{1}{6}x^3\right)$$

Vermutung: $y_n(x) = y_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha x)^k}{k!}$
Induktionsschritt:

$$y_{n+1}(x) = (Ty_n)(x) = y_0 + \alpha \int_0^x y_n(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{I.A.}}{=} y_0\left(1 + \alpha \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} \int_0^x t^k\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= y_0\left(1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{k+1}}{k!(k+1)} x^{k+1} - 0\right) = y_0\left(1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha^k}{k!} x^k\right) = y_0 \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\alpha^k}{k!} x^k \quad ✓$$

$$\Rightarrow y_n(x) \longrightarrow y(x) = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{k!} = y_0 e^{\alpha x} \leftarrow \text{Lösung des AWP}$$

Übung 6.5.Ü1: Weitere DGL/AWP

Gesucht: $y : [0, \frac{99}{100}] \to \mathbb{R}$ mit $y'(x) = xy(x)$ und $y(0) = 1$.

$$\overset{\text{HSDI}}{\iff} y(x) = 1 + \int_0^x t y(t)\,\mathrm{d}t$$

Sei also $T : \mathrm{C}[0, \frac{99}{100}] \to \mathrm{C}[0, \frac{99}{100}],\ x \mapsto 1 + \int_0^x t y(t)\,\mathrm{d}t$.

- $\mathrm{C}[0, \frac{99}{100}]$ ist **vollständig** (auf kompaktem Intervall). ✓
- T ist nach HSDI **Selbstabbildung** auf $\mathrm{C}[0, \frac{99}{100}]$. ✓
- Seien $f, g \in \mathrm{C}[0, \frac{99}{100}]$.

$$\begin{aligned}
\|T(f) - T(g)\|_\infty &= \sup_{x \in [0, \frac{99}{100}]} \left| \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t g(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\le \sup_{x \in [0, \frac{99}{100}]} \int_0^x |t| \cdot |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^{\frac{99}{100}} |t| \cdot |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\le \frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100} \cdot \|f - g\|_\infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow T$ ist **Kontraktion** mit $L = \left(\frac{99}{100}\right)^2$. ✓

Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz hat T also einen Fixpunkt y auf $\mathrm{C}[0, \frac{99}{100}]$.
Fixpunktiteration:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 \\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x t \underbrace{y_0(t)}_{=1}\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{2}x^2 \\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x t \left(1 + \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 4}x^4
\end{aligned}$$

Vermutung: $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2^k k!}$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
y_{n+1}(x) &= 1 + \int_0^x t y_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_0^x t \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{2^k k!}\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_0^x \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k+1}}{2^k k!}\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k+2}}{\underbrace{(2k+2)}_{2(k+1)} k! 2^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{2k}}{2^k n!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^{2k}}{2^k n!}
\end{aligned}$$

Betrachte nun:

$$y_n \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

Also ist $y(x) := \exp \frac{x^2}{2}$ die Lösung des Anfangswertproblems.

7 Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

7.1 Partielle und totale Ableitungen

Vorbemerkung:

- $e^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ ist ein Vektor $(0,\ldots,1,\ldots,0) = \left(\delta_{ij}\right)_{i\in\underline{n}}$
- bei Vektoren: oberer Index ist Nummerierung, unterer Index ist Bezug auf Komponente.
  $e^{(2)} = (0,1)$ in $\mathbb{R}^2$, $e_0^{(2)} = 0,\ e_1^{(2)} = 1$
- Koordinatenrichtungen: $x_1,\ldots,x_n$ oder x,y,z (je nach Zusammenhang).

Definition 7.1.1: Partielle Differenzierbarkeit

Sei $x^{(0)}$ innerer Punkt von $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
$f: U \to \mathbb{R}^m$ heißt **partiell diffbar** in $x^{(0)}$ nach x_j ($j \in \underline{n}$), falls

$$\lim_{\substack{h\to 0\\(h\in\mathbb{R})}} \frac{f\left(x^{(0)}+he^{(j)}\right)-f\left(x^{(0)}\right)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x^{(0)}\right) =: \partial_j f\left(x^{(0)}\right)$$

existiert. Dieser heißt **partielle Ableitung** von f in $x^{(0)}$ nach x_j.

- Ist 1-dimensionale Ableitung! Alle anderen Variablen ($x_i,\ i \neq j$) als konstant annehmen und als 1-D-Funktion von x_j ableiten.
- Entsprechend Ableitungsregeln übertragen, soweit sinnvoll.

Beispiel 7.1.2: Partielle Ableitungen

a) $f(x_1,x_2) = \frac{x_1^2+2x_2}{x_1},\ x_1 \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{2x_1x_2-\left(x_1^2+2x_2\right)\cdot 1}{x_1^2},\ x_1 \neq 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{2x_1-\left(x_1^2+2x_2\right)\cdot 0}{x_1^2} = \frac{2}{x_1},\ x_1 \neq 0$$

$\to$ Ebene (ohne x_2-Achse) ist hier der Definitionsbereich.

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\boldsymbol{(x,y) \neq (0,0)}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\left(x^2+y^2\right)-xy\cdot 2x}{x^2+y^2} = y\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\left(x^2+y^2\right)-xy\cdot 2y}{x^2+y^2} = x\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$\boldsymbol{(x,y) = (0,0)}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f((x,y)+(h,0))-f(x,y)}{h} \overset{(x,y)=(0,0)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} = 0 \text{ weil der Zähler } = 0 \text{ ist (ohne Limesbildung).}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ analog.

$\Rightarrow f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell diffbar nach x und y.

Aber: f unstetig in $(0,0)$: Sei $(t,t) \xrightarrow{t\to 0} 0 \Rightarrow f(t,t) = \frac{t\cdot t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \not\to 0 = f(0,0)$

Also: partiell diffbar $\not\Rightarrow$ stetig

(3) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ z^2 - e^x \\ \sin y + \cos z \end{pmatrix}$

Vektorwertige Funktionen komponentenweise ableiten (vgl. Konvergenz in $\mathbb{R}^m$) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -e^x \\ 0 \end{pmatrix}; \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \cos y \end{pmatrix}; \ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ -\sin z \end{pmatrix}$$

Definition 7.1.3: Totale Differenzierbarkeit

Sei $x^{(0)}$ innerer Punkt von $U \subseteq \mathbb{R}^n$. $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt **(total) diffbar** in $x^{(0)}$, falls es eine lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

gibt, sodass

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ (h \in \mathbb{R}^n)}} \frac{f\left(x^{(0)} + h\right) - f\left(x^{(0)} - L(h)\right)}{|h|} = 0 \in \mathbb{R}^m$$

$h \mapsto L(h)$ heißt **totales Differential** (totale Ableitung, Fréchet-Ableitung) von f in $x^{(0)}$.

Bezeichnung: $L(h) := \mathrm{d}f(h) =: \mathrm{d}f\left(x^{(0)}, h\right) =: \underbrace{f'\left(x^{(0)}\right)}_{\text{lin. Abb.}}(h)$

Definition 7.1.4: Landau-Symbole

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $g : D \to \mathbb{R}^+$.

a) $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ für $x \longrightarrow \xi$ $:\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to \xi} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ existiert und $= 0$.

b) $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \longrightarrow \xi$ $:\Leftrightarrow$ $\exists$const. $C \in \mathbb{R}_0^+ : \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (\mathcal{U}_\varepsilon(\xi) \cap D) \setminus \{\xi\} : \frac{|f(x)|}{g(x)} \leq C$

d.h. $f\left(x^{(0)} + h\right) - f\left(x^{(0)}\right) - f'\left(x^{(0)}\right) = \mathrm{o}(|h|)$ für $h \longrightarrow 0$ $\Leftrightarrow:$ f total diffbar in $x^{(0)}$.

Bemerkung 7.1.5:

Seien $n = m = 1$, $L(h) = ah$ ($a \in \mathbb{R}$ konstant).

Dann ist $f\left(x^{(0)} + h\right) - f\left(x^{(0)}\right) = ah + \mathrm{o}(|h|)$ für $h \longrightarrow 0$, d.h. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f\left(x^{(0)}+h\right) - f\left(x^{(0)}\right)}{h} = a + 0 \Rightarrow f'\left(x^{(0)}\right) = a$.

$\Rightarrow$ Die totale Ableitung ist in 1-D die übliche Ableitung.

Satz 7.1.6:

a) f total diffbar in $x^{(0)} \Rightarrow f$ stetig in $x^{(0)}$.

b) Die lineare Abbildung $f'\left(x^{(0)}\right)$ ist, wenn sie existiert, eindeutig gegeben.

Definition 7.1.7: Jacobi-Matrix

Die Darstellung der linearen Abbildung

$$f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ in } x^{(0)}$$

bzgl. Basen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ als $m \times n$-Matrix heißt **Jacobi-Matrix** $J_{f\left(x^{(0)}\right)} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Ihre Determinante heißt **Jacobi-Determinante** oder ***Jacobian***.

Beispiel 7.1.8:

Sei $f(x) := Ax$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$$f\left(x^{(0)}+h\right) - f\left(x^{(0)}\right) = A\left(x^{(0)}+h\right) - Ax^{(0)} = Ah$$
$$f\left(x^{(0)}+h\right) - f\left(x^{(0)}\right) - Ah = 0 = \mathrm{o}(|h|),\ h \longrightarrow 0$$

f in ganz $\mathbb{R}^n$ total diffbar, $f'\left(x^{(0)}\right) = A\ \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

Es gilt analog zu 1-D:
Seien f, g total diffbar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.
$\Rightarrow f+g,\ \lambda f$ total diffbar und $(f+g)' = f'+g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$.

Lemma 7.1.9:

Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $0 < q < p < +\infty$.

a) $\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q\right)^{1/q}$ (**Jensen'sche Ungleichung**)

b) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a_i| \le |a|_{\mathbb{R}^n} \le \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ ($|\cdot|_{\mathbb{R}^n}$ ist euklidische Norm)

Satz 7.1.10:

Sei $x^{(0)}$ innerer Punkt von $U \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}^m$ in U *partiell diffbar* nach allen Variablen.
Wenn diese partiellen Ableitungen *alle stetig* in $x^{(0)}$ sind, *dann* ist f in $x^{(0)}$ **total diffbar**.
Die Jacobi-Matrix (bzgl. kartesischer Koordinaten, d.h. bezüglich der Standardbasis $\left(e^{(j)}\right)_j$), ist

$$f'\left(x^{(0)}\right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(x^{(0)}\right)\right)_{\substack{i\in \underline{m} \\ j \in \underline{m}}}$$

Beispiel 7.1.11:

a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y^2 \\ 2x-4 \\ xe^y \end{pmatrix} \Rightarrow f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 & 2yx^2 \\ 2 & -1 \\ e^y & xe^y \end{pmatrix}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f überall partiell diffbar, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
f *nicht* total diffbar in $(0,0)$, da f unstetig in $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ unstetig in } (0,0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cdot \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{y^3}{yx} \begin{cases} \longrightarrow +\infty & (y \to 0^+) \\ \longrightarrow -\infty & (y \to 0^-) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Stetigkeitsbedingung in 7.1.10 kann nicht weggelassen werden.

Definition 7.1.12: Gradient

Im Fall $f : D \to \mathbb{R}$, f diffbar in $x^{(0)} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

$$f'\left(x^{(0)}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^{(0)}\right), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x^{(0)}\right)\right) =: \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\left(x^{(0)}\right) =: \operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right)$$

Gradient von f.

Definition 7.1.13: Nabla- und verwandte Operatoren

a) **Vektorprodukt/Kreuzprodukt** (nur im $\mathbb{R}^3$):

Für $a, b \in \mathbb{R}^3$ sei $a \times b := a \wedge b := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

b) **Nabla-Operator:** $\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

- Für $g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, ist also $\operatorname{grad} g = (\nabla g)^{\mathrm{T}}$.
- Für diffbares $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, (gleiches n) sei

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i =: \nabla \cdot f =: \operatorname{div} f$$

  die **Divergenz** der Funktion.
- Für diffbares $f : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, sei

$$\operatorname{rot} f := \nabla \times f := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} f_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \end{pmatrix} =: \operatorname{curl} f$$

  die **Rotation** von f.
- Für zweimal diffbares $g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sei

$$\Delta g := \nabla \cdot \nabla g = \operatorname{div}(\operatorname{grad} g)^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} g$$

  wobei Δ **Laplace-Operator** genannt wird.
  Funktionen mit $\Delta g = 0$ (Laplace-Gleichung) heißen **harmonisch**.
- Für diffbares $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, in $x^{(0)}$ gilt:

$$f'\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1\left(x^{(0)}\right) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m\left(x^{(0)}\right) \end{pmatrix} = \left(\nabla f_1\left(x^{(0)}\right), \cdots, \nabla f_m\left(x^{(0)}\right)\right)^{\mathrm{T}}$$

Beispiel 7.1.14:

a) **Maxwell-Gleichungen** (Elektromagnetische Effekte)

$\operatorname{div} D = \rho$ ⇝ Quelle des el. Feldes (D) sind die Ladungen ρ (Ladungsdichte)

$\operatorname{rot} E = -\dot{B}$ ($\dot{B} = \frac{\partial}{\partial t} B$, Ableitung nach der Zeit)
⇝ zeitlich veränderliche Magnetfelder (B) erzeugen el. Felder (E) (Wirbelfelder, deren geschlossene Feldlinien die Änderungsrichtung des Magnetfelds umkreisen) → Dynamo, Generator

$\operatorname{div} B = 0$ ⇝ Es gibt keine magnetischen Monopole.

$\operatorname{rot} H = j$ ⇝ Ströme (j) erzeugen Magnetfelder (H) (deren geschlossene Feldlinien die Ströme umkreisen)

(div und rot hier nur bzgl. Ortskoordinaten x, y, z, nicht Zeit t)

b) **Cauchy-Navier-Gleichung** (Elastodynamik, z.B. Erdbeben) (vgl. Navier-Stokes-Gleichung)

$$\alpha^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \beta^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$u : \underset{\text{Ort}}{\mathbb{R}^3} \times \underset{\text{Zeit}}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^3$: Verschiebung

α: Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen (Druckwellen)

β: Ausbreitungsgeschwindigkeit von Scherwellen

t: Zeit

c) $f(x, y, z) := ye^x + x \sin z$

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (ye^x + \sin z,\ e^x,\ x \cos z) \text{ bzw. } \nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^x + \sin z \\ e^x \\ x \cdot \cos z \end{pmatrix}$$

$$\Delta f(x,y,z) = \operatorname{div} \nabla f(x,y,z) = ye^x + 0 + (-x \sin z) = ye^x - x \sin z$$

d) $g(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2 + y \\ xy \\ e^x \end{pmatrix}$

$$\operatorname{div} g(x,y,z) = 2x + x + 0 = 3x$$

$$g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 \\ y & x & 0 \\ e^x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} g(x,y,z) = \operatorname{Spur} g'(x,y,z)$$

$$\operatorname{rot} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} g_3 - \frac{\partial}{\partial z} g_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} g_1 - \frac{\partial}{\partial x} g_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} g_2 - \frac{\partial}{\partial y} g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - e^x \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^x \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

Definition 7.1.15: Richtungsableitung

Sei $x^{(0)}$ innerer Punkt von $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$.
f besitzt in $x^{(0)}$ eine Richtungsableitung in Richtung $v \in \mathcal{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\}$, falls

$$\lim_{\substack{h \to 0^+ \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f\left(x^{(0)} + hv\right) - f\left(x^{(0)}\right)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^{(0)}\right)$$

existiert.
vgl. normale partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ mit Richtungsableitung in Richtung $e^{(j)}$.

Übung 7.1.Ü1: Gegenbeispiel Richtungsableitungen und totale Diffbarkeit

Sei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f hat Richtungsableitungen in jede Richtung $v \in \mathcal{S}^1$, ist aber nicht total diffbar.

7.2 Höhere Ableitungen

entsprechend 1-D (falls Grenzwert existent):

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right)=\lim_{\substack{h\to 0\\(h\in\mathbb{R})}}\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}+he^{(j)}\right)-\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right)}{h}:=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\left(x^{(0)}\right):=f_{x_ix_j}\left(x^{(0)}\right)$$

Achtung Reihenfolge! In allen Schreibweisen: „Das, was näher an f dran ist, zuerst."
D.h.: bei letzterem andersrum als bei Bruchschreibweise.

Definition 7.2.1: Gebiet

$G\subseteq\mathbb{R}^n$ heißt...

a) **zusammenhängend** (*connected*), falls gilt:
Zu je zwei Punkten $x,y\in G$ existieren endlich viele Punkte $x^{(1)},\dots,x^{(m)}\in G$ derart, dass die Verbindungsstrecken $\overline{xx^{(1)}}$, $\overline{x^{(1)}x^{(2)}}$, $\dots$, $\overline{x^{(m-1)}x^{(m)}}$, $\overline{x^{(m)}y}$ in G enthalten sind.
Dabei ist $\overline{ab}:=\{a+\lambda(b-a)\,|\,\lambda\in\,]0,1[\,\}$ für $a,b\in\mathbb{R}^n$.
Man sagt auch, der **Polygonzug** $\overline{xx^{(1)}\cdots x^{(m)}y}$ liegt in G.

b) **Gebiet** (*region*), falls G offen und zusammenhängend ist.

Definition 7.2.2: Räume stetig partiell diffbarer Funktionen

Sei $G\subseteq\mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir betrachten Funktionen $f:G\to\mathbb{R}^m$.

$\mathrm{C}^{(1)}(G,\mathbb{R}^m)$: Raum aller auf G (nach allen Variablen) stetig partiell diffbaren Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^m$.

$\mathrm{C}^{(k)}(G,\mathbb{R}^m)$: Raum aller auf G (nach allen Variablen) k-mal stetig partiell diffbaren Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^m$.

$\mathrm{C}^{(k)}(G):=\mathrm{C}^{(k)}\left(G,\mathbb{R}^1\right)$ (skalare Funktionen)

Satz 7.2.3: Satz von Schwarz

Sei $G\subseteq\mathbb{R}^n$ Gebiet, $U\subseteq G$ offen, $f\in\mathrm{C}^{(1)}(G,\mathbb{R}^m)$, $x^{(0)}\in U$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ existieren und sind *stetig* in $x^{(0)}$.
Dann ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\left(x^{(0)}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\left(x^{(0)}\right)$. (Vertauschbarkeit gemischter Ableitungen)

Satz 7.2.4: Satz von Schwarz II

Sei $G\subseteq\mathbb{R}^n$ Gebiet, $U\subseteq G$ offen, $x^{(0)}\in U$, $f\in\mathrm{C}^{(1)}(G,\mathbb{R}^m)$ und es existiere $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ in U, stetig in $x^{(0)}$.
$\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ existiert in $x^{(0)}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\left(x^{(0)}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\left(x^{(0)}\right)$
(Verallgemeinerung von 7.2.3)

Also gilt: In $\mathrm{C}^{(k)}(G,\mathbb{R}^m)$ sind die gemischten Ableitungen bis einschließlich Ordnung k unabhängig von der Reihenfolge der Bildung.

$$\frac{\partial^4}{\partial x_1\partial x_2^2\partial x_3}=\partial_1\left(\partial_2^2(\partial_3 f)\right)=\partial_2(\partial_3(\partial_2(\partial_1 f)))=\dots$$

Beispiel 7.2.5:

Die Stetigkeitsvoraussetzung an die 2. Ableitung kann nicht entfallen:

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x,y) &= \left(\frac{y^3\left(x^2+y^2\right) - xy^3 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \frac{x3y^2\left(x^2+y^2\right) - xy^3 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} \right) \\ &= \left(\frac{y^3\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \frac{xy^2\left(3x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \right); \; (x,y) \neq (0,0) \end{aligned}$$

$$\text{in } (0,0): \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-0}{h} = 0$$

$\Rightarrow f$ überall diffbar,

- auf y-Achse: $f_x(0,y) = \frac{y^3\left(y^2-0\right)}{\left(0+y^2\right)^2} = y$
- auf x-Achse: $f_y(x,0) = 0$

auch für $x = y = 0$.
$\Rightarrow f_{xy}(0,y) = 1,\; f_{yx}(x,0) = 0 \; \forall y, x$
$\Rightarrow f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$

Sind die Voraussetzungen vom Satz von Schwarz nicht erfüllt?

$$f_x(x,y) = \frac{y^5 - y^3x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\left(5y^4 - 3y^2x^2\right)\left(x^2+y^2\right)^2 - y^3\left(y^2-x^2\right)2\left(x^2+y^2\right)2y}{\left(x^2+y^2\right)}, \; (x,y) \neq (0,0)$$

$\Rightarrow$ (für $x \neq 0$) $f_{xy}(x,0) = 0 \underset{x\to 0}{\not\to} f_{xy}(0,0) = 1$ nicht stetig!

Definition 7.2.6: HESSEMATRIX

$f: G \to \mathbb{R}$ besitze *alle* (d.h. auch die gemischten) partiellen Ableitungen 2. Ordnung.
Dann heißt

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x) & \cdots & f_{x_1x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x) & \cdots & f_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix}$$

Hessematrix (*Hessian*) von f in $x \in G$.

Achtung: *Jacobian* = Jacobi-Determinante, *Hessian* = Hesse-Matrix

Für $f \in C^{(2)}(G)$ ist $H_f(x)$ eine symmetrische Matrix (d.h. $H_f(x)^T = H_f(x)$) wegen Satz von Schwarz.

7.3 Zentrale Sätze

Satz 7.3.1: Kettenregel

Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m,\ g : \mathbb{R}^m \supseteq V \to \mathbb{R}^p,\ f(U) \subseteq V$ und f in $\xi \in \mathring{U},\ g$ in $\eta := f(\xi) \in \mathring{V}$ diffbar.
$\Rightarrow h := g \circ f : U \to \mathbb{R}^p\ (x \mapsto g(f(x)))$ in ξ diffbar und

$$h'(\xi) = g'(f(\xi))f'(\xi)$$

Multiplikation von Jacobi-Matrizen

$$p \times n = p \times m \cdot m \times n$$

somit gilt für die (i,j)-te Komponente von $h'(\xi)$:

$$\left(h'(\xi)\right)_{i,j} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\xi) = \sum_{k=1}^{m} \left(g'(\eta)\right)_{i,k} \cdot \left(f'(\xi)\right)_{k,j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(\eta) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\xi)$$

Korollar 7.3.2:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $g \in C^{(1)}\left(G, \mathbb{R}^1\right),\ x^{(0)} \in G,\ v \in \mathbb{R}^n,\ |v| = 1$.
Dann existiert die Richtungsableitung von g in $x^{(0)}$ in Richtung v und

$$\frac{\partial g}{\partial v}\left(x^{(0)}\right) = \left(\operatorname{grad} g\left(x^{(0)}\right)\right) \underset{\uparrow}{\cdot}\, v$$

(euklidisches Skalarprodukt)

Bemerkung 7.3.3:

Sei $a, b \in \mathbb{R}^n$. $\Rightarrow a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\sphericalangle(a,b)$, d.h. $a \cdot b \leq |a|\,|b|$, also:

$$\frac{\partial g}{\partial v}\left(x^{(0)}\right) \leq \left|\operatorname{grad} g\left(x^{(0)}\right)\right|$$

und

$$\frac{\partial g}{\partial v}\left(x^{(0)}\right) = \left|\operatorname{grad} g\left(x^{(0)}\right)\right| \Leftrightarrow v \upuparrows \operatorname{grad} g\left(x^{(0)}\right) \Leftrightarrow v = \frac{\operatorname{grad} g\left(x^{(0)}\right)}{|\operatorname{grad} g\left(x^{(0)}\right)|} \text{ wenn } \operatorname{grad} g\left(x^{(0)}\right) \neq 0$$

d.h. $\operatorname{grad} g\left(x^{(0)}\right)$ ist in $x^{(0)}$ die **Richtung des steilsten Anstiegs** der Höhenlinien von g.

Beispiel 7.3.4: Polarkoordinaten

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi;\ r \in \mathbb{R}_0^+,\ \varphi \in [0, 2\pi[$

$$f(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$g(x,y) = e^{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow (g\circ f)(r,\varphi) = g(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) = e^{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = e^{r^2}$$

$$\Rightarrow (g\circ f)'(r,\varphi) = \left(\frac{\partial(g\circ f)}{\partial r}(r,\varphi),\ \frac{\partial(g\circ f)}{\partial\varphi}(r,\varphi)\right) = \left(2re^{r^2}, 0\right)$$

Kettenregel:

$$g'(x,y) = \left(2xe^{x^2+y^2},\ 2ye^{x^2+y^2}\right)$$

$$\begin{aligned} (g\circ f)'(r,\varphi) &= g'(f(r,\varphi))\cdot f'(r,\varphi) \\ &= \left(2r\cos(\varphi)e^{r^2},\ 2r\sin(\varphi)e^{t^2}\right)\cdot\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \left(2r\cos^2(\varphi)e^{r^2} + 2r\sin^2(\varphi)e^{r^2},\ -2r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)e^{r^2} + 2r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)e^{r^2}\right) \\ &= \left(2re^{r^2},\ 0\right) \end{aligned}$$

Satz 7.3.5:

Seien $F \in C^{(2)}(G,\mathbb{R})$, $f \in C^{(2)}(G,\mathbb{R}^3)$, $G \subseteq \mathbb{R}^3$ Gebiet. Dann gilt:

a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} F)^T = 0$
b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$
c) $\Delta f = (\operatorname{grad}\operatorname{div} f)^T - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} f)$
(Δ ist komponentenweise zu verstehen)

Definition 7.3.6: (Mehrdimensionale) Stammfunktion

Seien $f: G \to \mathbb{R}^n$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet.
f besitzt eine **Stammfunktion** oder **Potenzial** $F: G \to \mathbb{R}$, falls $f = \nabla F$ auf G.
f heißt dann **Gradientenfeld**.

Korollar 7.3.7: Integrabilitätsbedingung

Sei $f \in C^{(1)}(G,\mathbb{R}^3)$ Gradientenfeld, $G \subseteq \mathbb{R}^3$ Gebiet.

$\Rightarrow \operatorname{rot} f = 0$ in G

Die Umkehrung gilt i.A. nicht!

Übung 7.3.Ü1: Gegenbeispiel zur Umkehrung der Integrabilitätsbedingung von Gradientenfeldern

Sei $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$.
Es ist $\operatorname{rot} f = 0$, aber f ist kein Gradientenfeld.

Satz 7.3.8: MWS Diff (mehrdimensional)

Sei $f: G \to \mathbb{R}$ diffbar, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $a, b \in G$, sodass $\overline{ab} \subset G$ (wobei $\overline{ab} := \{a + \lambda(b-a) \,|\, \lambda \in]0,1[\}$).
Dann gilt:

$$\exists \xi \in \overline{ab} : f(b) - f(a) = (\operatorname{grad} f(\xi)) \cdot (b-a)$$

Satz 7.3.9: Satz von Taylor (mehrdimensional)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathrm{C}^{(r+1)}(G, \mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, $\xi, \xi + h \in G$, sodass $\overline{\xi(\xi+h)} \subseteq G$.

$$\Rightarrow f(\xi + h) = f(\xi) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k}} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f(\xi) \cdot \frac{h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} + R_r$$

Restglieddarstellung:

a) nach Lagrange:

$$\exists \vartheta \in]0,1[\text{, sodass } R_r = \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = r+1}} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f(\xi + \vartheta h) \cdot \frac{h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$$

b) in Integralform:

$$R_r = \int_0^1 \frac{(1-t)^r}{r!} \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = r+1}} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f(\xi + th) h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n} \, \mathrm{d}t$$

Definition ergänzend zu 7.3.9: Multiindizes

$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0{}^n$ heißt bei der Verwendung in Summen/Produkten **Multiindex**, und es ist:

$$h^\alpha := \prod_{i=1}^{n} h_i^{\alpha_i} = h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n} \text{ für } h \in \mathbb{R}^n$$

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

$$\alpha! := \prod_{i=1}^{n} \alpha_i! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

$$\mathrm{D}^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha}} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \text{ (\textbf{Differentialoperator})}$$

Satz 7.3.9': Satz von Taylor (mit Multiindizes)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathrm{C}^{(r+1)}(G, \mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, $\xi, \xi + h \in G$, sodass $\overline{\xi(\xi+h)} \subseteq G$.

$$\Rightarrow f(\xi + h) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \le r}} \frac{1}{\alpha!} \mathrm{D}^\alpha f(\xi) h^\alpha + R_r$$

$$R_r = \sum_{|\alpha| = r+1} \frac{1}{\alpha!} \mathrm{D}^\alpha f(\xi + \vartheta h) h^\alpha = \int_0^1 \frac{(1-t)^r}{r!} \sum_{|\alpha| = r+1} \mathrm{D}^\alpha f(\xi + th) h^\alpha \, \mathrm{d}t$$

für ein geeignetes $\vartheta \in]0,1[$.

Übung 7.3.Ü2: Multinomialsatz

Sei $h \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right)^k = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = k}} \frac{k!}{\alpha!} h^\alpha$$

Satz 7.3.10: Extrema ohne Nebenbedingung

a) **Fermat'sches Kriterium** für lokale Extrema:
Sei $f \in C^{(1)}(G)$ (also: $f : G \to \mathbb{R}^1$).
Damit f in $x^{(0)} \in G$ ein lokales Minimum oder lokales Maximum besitzt, ist *notwendig*:

$$\underbrace{\operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right)}_{=f'\left(x^{(0)}\right)} = 0 \Leftrightarrow: x^{(0)} \text{ **stationärer/kritischer Punkt** von } f$$

b) Seien $f \in C^{(2)}(G)$, $\operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right) = 0$.
Hinreichend für ein strenges lokales $\left|\begin{array}{c}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{array}\right|$ von f in $x^{(0)} \in G$ ist, dass die Hesse-Matrix $H_f\left(x^{(0)}\right)$ von f in $x^{(0)}$ $\left|\begin{array}{c}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{array}\right|$ definit ist.
Es liegt kein lokales Minimum/Maximum vor, falls $H_f\left(x^{(0)}\right)$ indefinit ist.
Ist $H_f\left(x^{(0)}\right)$ *semi*definit, so ist keine allgemeine Aussage über Extrema in $x^{(0)}$ möglich.

Aus reeller linearer Algebra: Definitheit einer Matrix

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix.

- A heißt **positiv semidefinit** $:\Leftrightarrow x^T A x \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- A heißt **positiv definit** $:\Leftrightarrow A$ positiv semidefinit und $x^T A x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- A heißt **negativ definit** $:\Leftrightarrow -A$ positiv definit.
- A heißt **indefinit** $:\Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R}^n : x^T A x > 0,\; y^T A y < 0$

A ist positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind ≥ 0 (d.h. in $\mathbb{R}_0^+$)
$\Leftrightarrow$ alle Hauptminoren sind ≥ 0 (d.h. in $\mathbb{R}_0^+$)

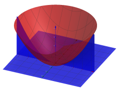
A ist positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind > 0 (d.h. in $\mathbb{R}^+$)
$\Leftrightarrow$ alle Hauptminoren sind > 0 (d.h. in $\mathbb{R}^+$)

Achtung! Alle Hauptminoren $< 0 \not\Rightarrow A$ negativ definit!

Die **Minoren** von A sind die Determinanten der quadratischen Teilmatrizen von A.
Die **Hauptminoren** sind die Determinanten der quadratischen Teilmatrizen von A, die durch Streichen der letzten Zeile(n) und letzten Spalte(n) von A entstehen,
d.h. die k-te Hauptminore ist $H_k := \det \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k,1} & \cdots & A_{k,k} \end{pmatrix}$ für $k \in \underline{n}$.

Bsp.: Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Dann sind die Hauptminoren: $H_1 := \det(1)$, $H_2 := \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $H_3 := \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Beispiel 7.3.11:



a) $f(x,y) := x^2 + y^2$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x,\ 2y) = (0,0)$$
$$\Leftrightarrow 2x = 0 \wedge 2y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ positiv definit } \forall (x,y)$$

$\Rightarrow$ (lokales) Minimum bei $(0,0)$

b) $f(x,y) := x + y,\ \operatorname{grad} f(x,y) = (1,1) \neq (0,0)\ \forall (x,y)$
$\Rightarrow$ kein Extremum (und da definiert auf ganz $\mathbb{R}^2$, kann es auch keine Randextrema geben).

c) $f(x,y) := x \cdot y,\ \operatorname{grad} f(x,y) = (y,x) = (0,0) \Leftrightarrow x = y = 0$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ indefinit}$$

denn $a^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} a = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = a_1 a_2 + a_2 a_1 = 2a_1 a_2 = \begin{cases} > 0 & a = \binom{1}{1} \\ < 0 & a = \binom{1}{-1} \end{cases}$

$\Rightarrow$ kein Extremum

d) $f(x,y) := x^2 + y^4$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(2x,\ 4y^3\right) = (0,0) \Leftrightarrow x = y = 0$$
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix},\ H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ positiv semidefinit}$$

$\Rightarrow$ keine allgemeine Aussage möglich.
Hier im konkreten Beispiel: $f(x,y) \geq 0$ und $f(0,0) = 0 \Rightarrow$ Minimum.
Aber: $f(x,y) := x^2 + y^3$, gleiche Situation ($x^{(0)} = (0,0)$, $H_f\left(x^{(0)}\right)$ positiv semidefinit),

$$f(0,0) = 0,\ f(0,\varepsilon) = \varepsilon^3 \begin{cases} > 0 & \varepsilon > 0 \\ < 0 & \varepsilon < 0 \end{cases}$$

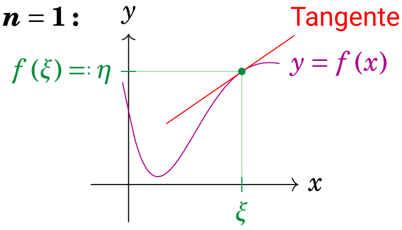
$\Rightarrow$ kein Extremum.

7.4 Geometrisches

Beispiel 7.4.1: TANGENTEN

Sei $f:\mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ Funktion, $x_{n+1} := f(x_1,\ldots,x_n)$ Kurve/Fläche in $\mathbb{R}^{n+1}$.

$\boldsymbol{n=1:}$



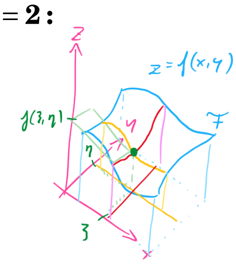
Tangente in (ξ,η): Steigung $f'(\xi)$

Tangente $y = f'(\xi)x + \beta$ (affin linear)

Wegen $f(\xi) = \eta$ ist $\eta = f'(\xi)\xi + \beta \Leftrightarrow \beta = \eta - f'(\xi)\xi$,

also $y = f'(\xi)(x-\xi) + \eta$

$\boldsymbol{n=2:}$



Tangente in x-Richtung:

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)\cdot(x-\xi) + f(\xi,\eta)$$

Tangente in y-Richtung:

$$z = \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\cdot(y-\eta) + f(\xi,\eta)$$

Tangentialebene an $\mathcal{F}$ in (ξ,η,ζ)

$$\begin{aligned}(x,y) \mapsto z &= \zeta + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)(x-\xi) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\cdot(y-\eta)\\ &= \zeta + \operatorname{grad} f(\xi,\eta)\cdot\begin{pmatrix} x-\xi \\ y-\eta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Äquivalente Form:

$$\Big(\underbrace{\operatorname{grad} f(\xi,\eta)}_{=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta),\ \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\right)},\ -1\Big)\cdot\begin{pmatrix} x-\xi \\ y-\eta \\ z-\zeta\end{pmatrix} = 0$$

Definition 7.4.1': TANGENTIALHYPEREBENE

$\boldsymbol{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}:}$

$x \in G \subseteq \mathbb{R}^n$, f wie oben: Tangente in $x^{(0)}$ in x_i-Richtung:

$$x_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right)\left(x_i - x_i^{(0)}\right) + f\left(x^{(0)}\right)$$

Tangentialhyperebene:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f\left(x^{(0)}\right) + \left(\operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right)\right)\left(x - x^{(0)}\right)\\ \Leftrightarrow 0 &= \underbrace{\begin{pmatrix}\nabla f\left(x^{(0)}\right)\\ -1\end{pmatrix}}_{\substack{\text{Normale auf } \mathcal{F} \\ \text{in } \left(x^{(0)}, f\left(x^{(0)}\right)\right)}}\cdot\begin{pmatrix} x - x^{(0)} \\ x_{n+1} - f\left(x^{(0)}\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

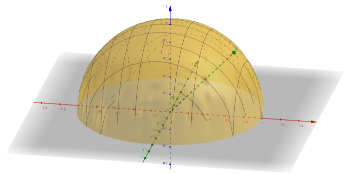
∇f ist die Projektion der Normalen auf G.

Tangentialvektoren: $t_{x_i} = \left(0,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right)\right)^{\mathrm{T}}$ mit 1 in der i-ten Komponente

Tangentialraum: $\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t_{x_i}\,\middle|\,\lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \underline{n}\right\}$

Beispiel 7.4.2: Halbkugel (Einheitskugel)

$$z := \sqrt{1-x^2-y^2} = f(x,y)$$



$$\nabla f = \left(\frac{1\cdot(-2x)}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^{\mathrm{T}} = \left(-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z}\right) = \frac{1}{z}(x,y)$$

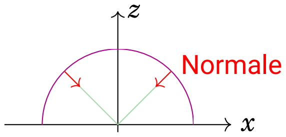
Normale: $z \neq 0$

$$\begin{pmatrix} -\frac{x}{z} \\ -\frac{y}{z} \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{z}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = n$$

in $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Tangentialvektoren:

$$t_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{z} \end{pmatrix}, \quad t_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{z} \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{R}^1$ bzw. $\mathbb{R}^2$:



7.5 Umkehrsatz, implizite Funktionen und Lagrange-Multiplikatoren

Zur Erinnerung: 1-D-Fall

Sei $f:[a,b]=:I\to f(I), f\in C^{(1)}(I)$.
$f'\neq 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist streng monoton mit Vorzeichen von f'.
$\Rightarrow \exists f^{-1} =: g$, diffbar auf $f(I)$ (Definitionsbereich) und $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$.

Jetzt: $f:\mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^n$, $f(x)=y$, $x=?$

Definition 7.5.1: Regularität und Invertierbarkeit (mehrdimensional)

$f:\mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^n$ heißt

a) in $x^{(0)} \in G$ **regulär** (*regular*), wenn
   (i) f in einer Umgebung von $x^{(0)}$ stetig total diffbar
   (ii) $\det f'\left(x^{(0)}\right) \neq 0$ (Jacobi-Determinante)

   $x^{(0)}$ heißt dann **regulärer Punkt** von f.
b) auf G regulär, wenn f in jedem $x^{(0)} \in G$ regulär ist.
c) in $x^{(0)}$ **lokal invertierbar**, falls eine Umgebung U von $x^{(0)}$ und V von $y^{(0)} := f\left(x^{(0)}\right)$ existieren, sodass $f\big|_U : U \to V$ bijektiv ist.
d) in G lokal invertierbar, falls f in jedem Punkt $x^{(0)} \in G$ lokal invertierbar ist.
   $\not\Rightarrow$ f global invertierbar (d.h. $f\big|_G$ bijektiv)!

Lemma 7.5.2:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \in G$.

a) $x^{(0)}$ regulärer Punkt $\Rightarrow \exists$ Umgebung U von $x^{(0)}$, auf der f regulär ist.

b) Die Menge der regulären Punkte von f ist offen.

Vorbemerkung 7.5.3:

a) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kann als Element von $\mathbb{R}^{n^2}$ aufgefasst werden.
$\|\cdot\|$ sei Matrixnorm, $|\cdot|$ sei Norm im $\mathbb{R}^n$.
Beide nennt man **verträglich**, falls

$$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\| \text{ und } |Ax| \leq \|A\|\,|x| \;\; \forall A,B \in \mathbb{R}^{n\times n},\; x \in \mathbb{R}^n$$

b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $f: M \to f(M)$ stetig und injektiv.
$\Rightarrow f^{-1}: f(M) \to M$ stetig (analog 1-D)

c) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Umgebung von $x \in U$, wenn x innerer Punkt von U ist.

Übung 7.5.Ü1: Verträgliche Normen

Für $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ sind die euklidischen Normen

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x^2} \text{ und } \|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2}$$

verträglich.

Satz 7.5.4: Umkehrsatz / Satz von der inversen Abbildung

Seien $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}^n$ und f in $x^{(0)} \in G$ regulär.
Dann ist f lokal invertierbar: $\exists$ *offene* Umgebung U von $x^{(0)}$ mit:

(1) $V := f(U)$ ist offene Umgebung von $y^{(0)} := f\left(x^{(0)}\right)$

(2) $f|_U : U \to V$ ist bijektiv, $\exists g := \left(f|_U\right)^{-1} : V \to U$

(3) g ist diffbar, $g' = (f')^{-1} \circ g = (f' \circ g)^{-1}$, d.h.

$$\left(\left(f|_U\right)^{-1}\right)'(y) = \left(f'(x)\right)^{-1} \qquad \text{mit } x = g(y)$$

$(f'(x))^{-1}$ ist inverse Jacobi-Matrix.

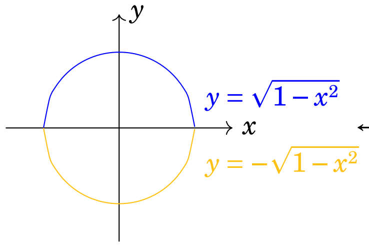
Beispiel 7.5.5: Kreiskoordinaten/Polarkoordinaten

$x_1 = r\cos\varphi,\; x_2 = r\sin\varphi;\; \varphi \in [0, 2\pi[,\; r \in \mathbb{R}^+$
Jacobi-Determinante:

$$\det \frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r \neq 0$$

(da in $x_1 = x_2 = 0$: $r = 0$, φ *beliebig* wäre (nicht eindeutig)).
Vgl. Kugelkoordinaten aus Übung

Betrachte nun: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ *implizite* Darstellung des Einheitskreises.



$\longleftarrow$ *explizite* Darstellung

hier: nicht global in explizite Darstellung auflösbar.
$(x = \cos\varphi,\ y = \sin\varphi;\ \varphi \in [0, 2\pi[$ ist *Parameterdarstellung*.)

Ob und wie man eine explizite Darstellung finden kann, sagt der:

Satz 7.5.6: Satz über implizite Funktionen

Voraussetzung: $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$, $G \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen,
$f : G \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar.

$M := \{(x,y) \in G \,|\, f(x,y) = 0\} \neq 0$,
d.h. $\exists \left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) \in G : f\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = 0$, und für dieses $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ gelte:

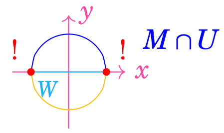
$$\det \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)\right)}_{:= \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)\right)_{\substack{i \in \underline{m} \\ j \in \underline{n}}}} \neq 0$$

Behauptung: $\exists$ offene Umgebungen $U \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ von $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ und $W \subseteq \mathbb{R}^n$ von $x^{(0)}$, und $\exists g \in C^{(1)}(W, \mathbb{R}^m)$, sodass

$$M \cap U = \{(x,y) \in U \,|\, f(x,y) = 0\} = \{(x, g(x)) \,|\, x \in W\}$$

d.h. M ist **explizit darstellbar** durch den Graphen von $y = g(x)$, also
$f(x,y) = 0,\ (x,y) \in U \Leftrightarrow y = g(x),\ x \in W$.

z.B.: $n = 1,\ m = 1,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$
M: Einheitskreis
$x^{(0)} := y^{(0)} := \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \neq 0$ für $y = y^{(0)}$



z.B. $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$,
$W =]-1, 1[$,
$g(x) := \sqrt{1-x^2}$.
Dann ist:
$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \,|\, 1 - x^2 - y^2 = 0\}$
$= \left\{\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) \,\middle|\, x \in]-1, 1[\right\}$

d.h. letztendlich: „Kann man ein (nicht-lineares) GLS nach bestimmten Variablen auflösen?"
reiner Existenzsatz!

Korollar 7.5.7:

Unter obiger Voraussetzung gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}$$

in einer Umgebung von $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$.

Bemerkung: Eventuell Variablen $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ umordnen, allgemein:

$$\operatorname{Rang}\left(f'\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)\right) \text{ maximal (d.h. } = m)$$

wieder: **reiner Existenzsatz**.

Extrema mit Nebenbedingungen (Nb.)

z.B.: minimiere $f(x) = e^{x_1^3+x_2^2}$ unter allen x mit $|x|^2 = 1$ $(g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0)$.
Idee: Einsetzen von $x_2 = \pm\sqrt{1-x_1^2}$. Aber: $\sqrt{x^2} = |x|$ in 0 nicht differenzierbar...
besser:

Satz 7.5.8: Lagrange-Multiplikator-Regel
(**nicht** die „Multiplikator-Regel von Lagrange", sondern die „Regel des Lagrange-Multiplikators"!)

Voraussetzung: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{(1)}(G,\mathbb{R}^1)$, $g \in C^{(1)}(G,\mathbb{R}^m)$, $n > m$, d.h. mehr Variablen als Nebenbedingungen.

f habe in $x^{(0)}$ ein lokales $\left|\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right|$ unter der Nebenbedingung $g(x^{(0)}) = 0$,

d.h. $x^{(0)} \in M := \{x \in G \mid g(x) = 0\}$ und $\exists$ Umgebung $\mathcal{U}(x^{(0)})$ mit $f(x) \left|\begin{matrix}\le\\ \ge\end{matrix}\right| f(x^{(0)})$ $\forall x \in (\mathcal{U}(x^{(0)}) \cap M)$.

Ferner gelte: $\operatorname{Rang} \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(x^{(0)})}_{m\times n} = m$

Behauptung: Dann existiert ein (Lagrange-)Multiplikator $\lambda^{(0)} := (\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}) \in \mathbb{R}^m$, sodass die **Lagrange-Funktion**

$$L(x,\lambda) := f(x) + \lambda \cdot g(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R}^m,\ \text{Skalarprodukt})$$

in $(x^{(0)}, \lambda^{(0)})$ *stationär* ist, d.h. $\frac{\partial L}{\partial x}(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) = 0$.

Beispiel 7.5.9:

a) $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^{(1)}(G,\mathbb{R})$ definiert **Niveauflächen**: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\} =: M_c$, $c \in \mathbb{R}$ konstant.
Sei (z.B.) $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^{(0)}) \neq 0$, $x^{(0)} \in M_c \overset{\text{impl. Fkt.}}{\Longrightarrow}$ lokal auflösbar $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ in Umgebung.
Normalenvektor zu M_c in Umgebung von $x^{(0)}$:

$$n = \begin{pmatrix}\nabla g\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\\ -1\end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix} = \underbrace{-\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{-1}}_{\text{Skalar}} \nabla f$$

$\Rightarrow$ Fläche, die durch $f(x) = \text{const.}$ gegeben ist, hat Normalenvektor ∇f.

z.B. Isobaren (Linien gleichen Luftdrucks)
„$\nearrow$" Druckgradient (Richtung des steilsten Anstiegs) ist senkrecht zur Isobare.

b) Welches Rechteck hat bei gegebenem Umfang maximalen Flächeninhalt?
Rechteckfläche $A(a,b) = ab$, Umfang $U(a,b) = 2a + 2b \overset{!}{=} \gamma$, d.h. $g(a,b) := 2a + 2b - \gamma \overset{!}{=} 0$.
1 Nebenbedingung $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}^1$.

$$L(a,b,\gamma) = ab + \lambda(2a + 2b - \gamma)$$

Notwendige Bedingung:

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial a} = b + 2\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial b} = a + 2\lambda,}_{\Rightarrow a=b} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2a + 2b - \gamma$$

$\Rightarrow 4a = \gamma \quad \Rightarrow a = b = \frac{\gamma}{4}$
Man kann sich leicht überlegen, dass es ein Maximum geben *muss*. Also ist dies durch das Quadrat ($a = b = \gamma/4$) gegeben.

8 Integration längs Kurven und Wegen

8.1 Kurven und Wege

Definition 8.1.1: Kurve und Weg

Sei $I := [a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Eine stetige Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ heißt **Weg** und ihr Bild $\varphi(I)$ heißt **Kurve**.
Den Weg φ bezeichnet man auch als **Parameterdarstellung** der Kurve.

Weitere Bezeichnungen:

- $\varphi(a)$: Anfangspunkt
- $\varphi(b)$: Endpunkt
- φ ist **geschlossen** $:\Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$
- φ ist **Jordan'scher Weg/doppelpunktfreier Weg** $:\Leftrightarrow$ φ injektiv
- φ ist **geschlossener Jordan'scher Weg** $:\Leftrightarrow$ φ geschlossen und $\varphi\big|_{]a,b[}$ injektiv
- φ ist **glatt/regulär** $:\Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{C}^{(1)}(I)$ und $\varphi' \neq 0$ auf I
- φ ist **stückweise glatt/stückweise regulär** $:\Leftrightarrow \exists$ endlich viele Punkte $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = b$, sodass $\varphi\big|_{[t_i,t_{i+1}]}$ glatt ist $\forall i \in \{0,\ldots,r\}$.
- φ ist **stückweise stetig diffbar** $:\Leftrightarrow \exists$ endlich viele Punkte $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{r-1} < t_r = b$, sodass $\varphi\big|_{[t_i,t_{i+1}]} \in \mathrm{C}^{(1)}[t_i,t_{i+1}]$ $\forall i \in \{0,\ldots,r\}$.

Entsprechende Begriffe für $\varphi(I)$ übertragen (Jordan'sche Kurve, ...).

Beispiel 8.1.2:

a) $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto x + t(y-x)$$
$$\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto y + t(x-y)$$

Gleiche Kurven ($\varphi([0,1]) = \psi([0,1])$), unterschiedliche (nämlich: entgegengesetzt laufende) Wege.
Geradlinige Verbindung von x und y – glatt und Jordan'sch.

Definition 8.1.3: Äquivalenzrelation

Sei M eine Menge.
Unter einer **Relation** in M versteht man eine Teilmenge $\sim \subseteq M \times M$ aus Paaren (x,y), die eine bestimmte Eigenschaft erfüllen. Man schreibt $x \sim y$ für $(x,y) \in \sim$.

Eine Relation $\sim$ heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

(Ä1) $x \sim x$ $\forall x \in M$ (Reflexivität)

(Ä2) $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$ $\forall x,y \in M$ (Symmetrie)

(Ä3) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ $\forall x,y,z \in M$ (Transitivität)

Die Menge aller zu $x \in M$ äquivalenten Elemente von M wird als **Äquivalenzklasse** zu x bezeichnet (Notation $[x]_\sim$), d.h. $[x]_\sim := \{y \in M \mid x \sim y\}$. Man schreibt oft einfach $[x]$, wenn die Relation klar ist.

Die Menge aller Äquivalenzklassen heißt $M/\!\sim\, := \{[x]_\sim \mid x \in M\}$.

Beispiel 8.1.4:

$=$, $\Leftrightarrow$, „ist gerade“, ... sind Äquivalenzrelationen.

Definition 8.1.5: Äquivalenz von Wegen

a) Seien I und J Intervalle.
Zwei Jordanwege $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ zur gleichen Kurve $\gamma = \varphi(I) = \psi(J)$ heißen **äquivalent**, wenn es eine streng monoton wachsende Abbildung $h : I \to J$ gibt, sodass $\varphi = \psi \circ h$.

b) Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, $I := [a,b]$. Dann bezeichnet

$$\varphi^- : I \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \varphi(a+b-t)$$

den in umgekehrter Orientierung durchlaufenen Weg.

Satz 8.1.6:

(1) Die Äquivalenz von Wegen ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation.

(2) Zu einer gegebenen Jordankurve $\gamma = \varphi(I)$ gibt es nur zwei Äquivalenzklassen von Wegen: $[\varphi]$ und $[\varphi^-]$. Diese bezeichnet man als die beiden **Orientierungen** der Kurve.

Satz 8.1.7:

Seien $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ *glatte* Jordanwege mit $\varphi \in [\psi]$ oder $\varphi \in [\psi^-]$.
Dann existiert $h : I \to J$ mit $\psi \circ h = \varphi$, wobei h bijektiv ist mit $h \in \mathrm{C}^{(1)}(I)$ und $h' \neq 0$ auf I.

8.2 Weglänge

Gesucht: Länge einer Kurve $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Weg $\varphi : I \to \gamma$.
Idee: Approximation durch Polygonzüge, basierend auf einer Zerlegung Z des Intervalls I (ähnlich wie bei Riemann-Integral).

Definition 8.2.1: Weglänge

Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ ein Weg und Z eine Zerlegung von I (also: $a = t_0 < \cdots < t_r = b$). Dann sei

$$l_\varphi(Z) := \sum_{j=0}^{r-1} \left|\varphi\left(t_{j+1}\right) - \varphi\left(t_j\right)\right|$$

Man bezeichnet

$$L(\varphi) := \sup\left\{ l_\varphi(Z) \,\middle|\, Z \text{ Zerlegung von } I \right\}$$

als die **Weglänge** von φ.
Ist $L(\varphi) < +\infty$, so heißt φ **rektifizierbar**.

Satz 8.2.2:

Seien $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$ zwei beliebige Wege, $I = [a,b]$. Dann gilt:

a) Ist φ Lipschitzsch mit Lipschitzkonstante Λ, so ist φ rektifizierbar mit $L(\varphi) \le \Lambda(b-a)$.

b) Sind φ und ψ rektifizierbar, so ist $\left|L(\varphi) - L(\varphi)\right| \le L(\varphi - \psi)$. (**Dreiecksungl. für Weglängen**)

c) $L(\varphi) \ge \left|\varphi(b) - \varphi(a)\right|$ („Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist eine Strecke.")

Satz 8.2.3:

Äquivalente Wege haben die gleiche Länge und es gilt außerdem $L(\varphi) = L(\varphi^-)$, d.h. die Weglänge hängt nur von der Kurve ab.

Man kann deshalb auch von einer **Kurvenlänge** sprechen, also $L(\varphi(I)) := L(\varphi)$.

Ist $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, dann ist $\varphi|_{[a,t]}$ $\forall t \in]a,b]$ auch ein Weg.

Definition 8.2.4: Bogenlänge

Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg.
Dann heißt $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$s(t) := \begin{cases} 0 & t = a \\ L\left(\varphi|_{[a,t]}\right) & t > a \end{cases}$$

Weglänge oder **Bogenlänge**.

Satz 8.2.5:

Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar. Dann ist die zugehörige Bogenlänge s auf I stetig und monoton wachsend.
Ist φ ein Jordanweg, so ist s streng monoton wachsend.
Ist φ (stückweise) stetig diffbar, dann ist s auch (stückweise) stetig diffbar und

$$s(t) = \int_a^t \left|\varphi'(\tau)\right| \mathrm{d}\tau \quad \forall t \in I$$

Beispiel 8.2.6:

a) Kreisumfang:

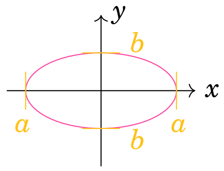
$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix},\ t \in [0, 2\pi]$$

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left|\begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix}\right| \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}t = 2\pi r$$

Fläche? → Analysis III.

b) Umgang einer Ellipse:

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix},\ t \in [0, 2\pi],\ \text{hier: } a > b$$



$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$$

$$|\varphi'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben durch $a^2 = b^2 + \varepsilon^2$. ε heißt **lineare Exzentrizität**.

$$|\varphi'(t)| = \sqrt{b^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + \varepsilon^2\sin^2 t}$$

$$\Rightarrow L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + \varepsilon^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow L(\varphi) = b\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{b}\right)^2 t}\,\mathrm{d}t$$

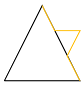
Dieses Integral ist nicht weiter auflösbar.

Es existieren viele solcher Integrale. Im Gegensatz zu Ableitungen, die es immer eindeutig gibt, kann man manche Integrale nicht eindeutig auflösen. Diese kann man dann nur numerisch näherungsweise ausrechnen.

Ein solches Integral heißt **elliptisches Integral**.

Beispiel 8.2.6:

c) Wir konstruieren eine Kurve iterativ:



$\longrightarrow \cdots$

Der Limes heißt **Kochkurve**. Nicht rektifizierbar → **Fraktale Geometrie**.

d) Die Länge eines Graphen:
Sei $f \in C^{(1)}[a,b]$ und $\Gamma := \{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$ der zugehörige Graph.
Parametrisierung mit x:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, \; t \in [a,b]$$

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, \mathrm{d}t$$

e) Parametrisierung über Bogenlänge: Beispiel Einheitskreis.

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \; t \in [0, 2\pi]$$

$$s(t) = \int_0^t |\varphi'(\tau)|\, \mathrm{d}\tau = t$$

d.h. dies ist schon eine Parametrisierung über die Bogenlänge.
Kreis mit Radius r:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$$

$$s(t) = \int_0^t r\, \mathrm{d}\tau = rt$$

Parametrisierung über die Bogenlänge:

$$\widetilde{\varphi}(s) = \begin{pmatrix} r\cos\left(\frac{s}{r}\right) \\ r\sin\left(\frac{s}{r}\right) \end{pmatrix}, \; s \in [0, 2\pi]$$

Denn mit der Bogenlänge kann man ein paar Dinge einfacher machen.

Bemerkung 8.2.7: Tangente und Normale

Interpretiert man eine Kurve als eine Bahn $x(t)$, so ist die Tangente an der Bahn in $x(t_1)$ gleich der Geschwindigkeit $\dot{x}(t_1) := x'(t_1)$.
Sekante durch $x(t_1)$ und $x(t_2)$:

$$\psi(t) = x(t_1) + \frac{t}{t_2 - t_1}(x(t_2) - x(t_1)) \begin{cases} t = 0: \ \psi(0) = x(t_1) \\ \psi(t_2 - t_1) = x(t_2) \end{cases}$$

$\lim\limits_{t_2 \to t_1}$ ergibt: $x(t_1) + t\dot{x}(t_1)$ Tangente
Vgl. Definition der totalen Ableitung von $t \mapsto x(t)$ in t_1:

$$x(t_1 + h) = \underbrace{x(t_1) + \dot{x}(t_1)h}_{\substack{\text{Tangente} \\ \text{(mit } h \text{ als Parameter)}}} + o(|h|) \text{ für } h \to 0$$

Hängt die Tangente von der Parametrisierung ab?

Sei $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(J) = x(I)$ gegeben, wobei beides glatte Jordan-Wege sind.

$$\overset{8.1.6}{\underset{8.1.7}{\Longrightarrow}} \exists h : I \to J, \in C^{(1)}, \ h' \neq 0 \text{ (streng monoton)} : \psi \circ h = x$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{\Longrightarrow} \dot{x}(t) = \psi'(h(t)) \cdot \dot{h}(t)$$

In $x^{(0)} = x(t_1) = \psi(t_2)$ ($\Rightarrow t_2 = h(t_1)$) erhält man also als Tangentialvektor:

- bzgl. x: $\dot{x}(t_1)$
- bzgl. ψ: $\psi'(t_2) = \frac{\dot{x}(t_1)}{\dot{h}(t_1)_{\neq 0}}$

Die Tangentialvektoren unterscheiden sich also nur durch einen skalaren Faktor $\neq 0$. Sie erzeugen somit die gleiche Tangente.
Zum Tangentialvektor in $x^{(0)}$ gibt es eine $(n-1)$-dimensionale, orthogonale Hyperebene, die **Normalenebene**. Sie ist gegeben durch

$$\left(x - x^{(0)}\right) \cdot t = 0$$

wenn t Tangentialvektor in $x^{(0)}$ ist (siehe oben).
Nimmt man die *Bogenlänge als Parameter*, so erhält man: Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $s \mapsto \varphi(s)$ eine solche Parametrisierung, $[c,d] \ni t \mapsto s(t)$ Bogenlänge.
$\Rightarrow \psi(t) := \varphi(s(t))$ neue Parametrisierung (zu der s die Bogenlänge ist).
Tangentialvektoren:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(s(t)) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \cdot \left|\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \Big/ \left|\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right| \ \textbf{Tangentialeinheitsvektor} \left(\text{wenn } \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \neq 0 \text{ z.B. glatter Weg}\right)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = 1 \ \forall s \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right) = 0 \ \forall s$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}s^2} \text{ ist ein } \textbf{Normalenvektor} - \text{die } \textbf{Hauptnormale}.$$

Für den Fall $\varphi''(s) \neq 0$ führt man folgendes ein:

- $|\varphi''(s)|$: Krümmung
- $\frac{1}{|\varphi''(s)|}$: Krümmungsradius (Radius eines Kreises mit der gleichen Krümmung)

Satz 8.2.8:

Jeder stückweise diffbarer Jordanweg ist rektifizierbar.
Dies gilt auch für stückweise stetig diffbare geschlossene Jordanwege.
Die Formel aus 8.2.5 ist somit anwendbar.

8.3 Kurvenintegrale

Schwerpunkt von n Massepunkten
Seien die Massen $m_1,\dots,m_n$ an den Orten $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$.
Schwerpunkt: $s = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i x^{(i)}$
Gesamtmasse: $M = \sum_{i=1}^n m_i$

Wie sieht das bei kontinuierlich verteilten Massen aus?
Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ ein Weg und $\rho : \varphi(I) \to \mathbb{R}$ die lineare Dichte (Masse pro Längeneinheit). Wir unterteilen die Kurve in Teilstücke gemäß einer Zerlegung Z von I.
Für die Gesamtmasse M gilt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \inf_{t\in[t_i,t_{i+1}]} \rho\left(\varphi(t)\right)(s(t_{i+1})-s(t_i)) \le M \le \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{t\in[t_i,t_{i+1}]} \rho\left(\varphi(t)\right)(s(t_{i+1})-s(t_i))$$

Diese Unter- und Obersummen führen zu dem Riemann-Stieltjes-Integral $\int_a^b \rho\left(\varphi(t)\right) \mathrm{d}s(t)$,

Definition 8.3.1: Kurvenintegral

Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $I := [a,b]$, ein Jordanweg einer rektifizierbaren Kurve $\gamma := \varphi(I)$ mit Bogenlängenfunktion $s : I \to \mathbb{R}$.
Ist $f : \gamma \to \mathbb{R}$ (wenn vektoriell, dann komponentenweise) eine Funktion, sodass das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_a^b f\left(\varphi(t)\right) \mathrm{d}s(t) =: \int_\gamma f(x)\, \mathrm{d}s$$

existiert, so nennt man f **integrierbar längs der Kurve** γ und $\int_\gamma f\, \mathrm{d}s$ das **Kurvenintegral** von f längs der Kurve γ (bzgl. der Bogenlänge).

Satz 8.3.2:

Sei $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan'sche rektifizierbare Kurve und $f : \gamma \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion.
Existiert das Integral längs γ

$$\int_\gamma f(x)\, \mathrm{d}s$$

für mindestens eine Parametrisierung $\varphi : I \to \gamma$, so existiert dieses für alle Jordan'schen Parametrisierungen von γ und führt stets zum gleichen Ergebnis (daher *Kurven*integral).

Wir befassen uns nun genauer mit dem R.-S.-Integral

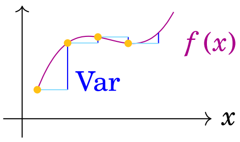
$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}\sigma(t)$$

Hierbei lassen wir die Bedingung fallen, dass σ monoton wachsend ist.

Definition 8.3.3: Variation

Für eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ auf $I := [a,b]$ und eine Zerlegung Z von I definieren wir die **Variation**

$$\operatorname{Var}(Z;f) := \sum_{i=0}^{r-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$



Ferner heißt

$$\mathrm{V}(f) := \mathrm{V}_a^b(f) := \sup\{\operatorname{Var}(Z;f) \mid Z \text{ Zerlegung von } I\}$$

die **Totalvariation** von f.

f heißt **von beschränkter Variation** (*bounded variation*), wenn $\mathrm{V}(f) < +\infty$.

$$\mathrm{BV}[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \mathrm{V}(f) < +\infty\}$$

Satz 8.3.4: Raum der Funktionen beschränkter Variation

$\mathrm{BV}[a,b]$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra.
Es gilt:

$$\mathrm{V}(\lambda f + g) \leq |\lambda| \mathrm{V}(f) + \mathrm{V}(g) \ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f,g \in \mathrm{BV}[a,b]$$
$$\mathrm{V}(fg) \leq \|f\|_\infty \mathrm{V}(g) + \|g\|_\infty \mathrm{V}(f) \ \forall f,g \in \mathrm{BV}[a,b]$$

Außerdem sind alle $f,g \in \mathrm{BV}[a,b]$ beschränkt.

Übung 8.3.Ü1:

$\mathrm{BV}[a,b]$ ist ein normierter Raum durch die Norm

$$\|f\|_{\mathrm{BV}[a,b]} := \mathrm{V}_a^b(f) + |f(a)|$$

für $f \in \mathrm{BV}[a,b]$.

Satz 8.3.5:

Folgende Funktionen auf I sind stets von beschränkter Variation:

(1) monotone Funktionen.

(2) Lipschitzstetige Funktionen.

Satz 8.3.6: Darstellungssatz von Jordan

Eine Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Variation, wenn sie als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellbar ist.

Satz 8.3.7:

Sei $f \in \mathrm{C}[a,b]$ und $g \in \mathrm{BV}[a,b]$. Dann existiert

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}g$$

und es gilt

$$\left| \int_a^b f \, \mathrm{d}g \right| \leq \|f\|_\infty \cdot \mathrm{V}_a^b(g)$$

Da die Bogenlänge s monoton wachsend ist, ist sie nach 8.3.5 von beschränkter Variation. Somit existiert das Kurvenintegral $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}s$ für alle stetigen Funktionen f.
Nach Satz 8.2.5 ist s außerdem stetig diffbar, wenn φ stetig diffbar ist. In diesem Fall gilt noch mehr.

Satz 8.3.8:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, $I := [a,b]$, $g \in \mathrm{C}^{(1)}(I)$.
Dann existiert $\displaystyle\int_a^b f \, \mathrm{d}g$, und es gilt $\displaystyle\int_a^b f \, \mathrm{d}g = \int_a^b f(t) \cdot g'(t) \, \mathrm{d}t$.

Korollar 8.3.9:

Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer, stückweise stetig diffbarer Jordan'scher Weg.
Dann gilt $\forall f : \varphi(I) \to \mathbb{R}$, für die $\int_{\varphi(I)} f \, \mathrm{d}s$ existiert, dass:

$$\int_{\varphi(I)} f \, \mathrm{d}s = \int_a^b f\left(\varphi(t)\right) \underbrace{\left|\varphi'(t)\right|}_{\underset{(8.2.5)}{=} s'(t)} \mathrm{d}t$$

Die Kurvenlänge ist also $L\left(\varphi\right) = \int_{\varphi(I)} 1 \, \mathrm{d}s$.

Beispiel 8.3.10:

Einheitskreis $\varphi(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$, $t\in[0,2\pi]$, mit Massendichte $\rho(x,y):=x^2+2y^2$.
Sei $K_1(0)$ die Kreislinie.
Gesamtmasse:

$$\begin{aligned} M &= \int_{K_1(0)} \rho\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \rho(\cos t,\ \sin t)\cdot|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t + 2\sin^2 t\right)\cdot 1\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} 1+\sin^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}(3t-\sin t\cos t)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi \end{aligned}$$

Schwerpunkt:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{M}\left(\int_{K_1(0)} x\rho(x,y)\,\mathrm{d}s,\ \int_{K_1(0)} y\rho(x,y)\,\mathrm{d}s\right) \\ &= \frac{1}{M}\int_{K_1(0)} \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\rho(x,y)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{3\pi}\left(\int_0^{2\pi} \cos t\left(1+\sin^2 t\right)\cdot 1\,\mathrm{d}t,\ \int_0^{2\pi} \sin t\left(1+\sin^2 t\right)\cdot 1\right) \\ &\overset{\text{partielle Integration}}{=} \dots \end{aligned}$$

8.4 Wegintegrale

Definition 8.4.1: WEGINTEGRAL

Sei $\varphi: I\to\mathbb{R}^n$, $I:=[a,b]$, ein rektifizierbarer, Jordan'scher Weg und $\gamma:=\varphi(I)$.

a) Für $f:\gamma\to\mathbb{R}$ sei

$$\int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}x_k := \int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\mathrm{d}\varphi_k(t);\ k\in\underline{n}$$

das (skalare) **Wegintegral** von f bzgl. x_k längs φ, sofern das Integral existiert.

b) Für $F:\gamma\to\mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $F_1,\dots,F_n$ sei

$$\int_\varphi F(x)\cdot\mathrm{d}x := \int_\varphi F_1\,\mathrm{d}x_1 + F_2\,\mathrm{d}x_2+\dots+F_n\,\mathrm{d}x_n := \sum_{k=1}^n\int_\varphi F_k(x)\,\mathrm{d}x_k$$

das **Wegintegral** oder **Arbeitsintegral** von F längs φ, sofern das Integral existiert.

Bei *geschlossenen* Wegen schreibt man auch $\oint$ statt $\int$.

Die bekannten Rechenregeln für R.-(S.)-Integrale übertragen sich auf das Wegintegral, insbesondere für stückweise stetig diffbare φ, da dann nach Satz 8.3.8 gilt:

$$\int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}x_k = \int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\varphi_k'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_\varphi F(x)\cdot\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n\int_a^b F_k\left(\varphi(t)\right)\varphi_k'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b F\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Beispiel 8.4.2:

$K_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ (Einheitskreis) wie im letzten Beispiel.

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},\ t \in [0, 2\pi];$$
$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix},\ t \in [0, \pi];$$
$$\psi(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix},\ t \in [0, 2\pi];$$

$\varphi \sim \Phi,\ \psi \sim \varphi^-$.
Sei $F(x,y) := \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$.

$$\oint_\varphi F \cdot \mathrm{d}(x,y) = \oint_\varphi y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (-1)\,\mathrm{d}t = -2\pi$$
$$\oint_\Phi F \cdot \mathrm{d}(x,y) = \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} (-1)\,\mathrm{d}t = -2\pi$$
$$\oint_\psi F \cdot \mathrm{d}(x,y) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi$$

Das *Weg*integral ist also *wegabhängig*.

Beispiel 8.4.2:

Sei nun $G(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.

$$\oint_\varphi G \cdot \mathrm{d}(x,y) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (-2\sin t \cos t)\,\mathrm{d}t = \cos^2 t \Big|_0^{2\pi} = 0$$
$$\oint_\Phi G \cdot \mathrm{d}(x,y) = \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} 2\sin(2t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \cos^2(2t) \Big|_0^{\pi} = 0$$
$$\oint_\psi G \cdot \mathrm{d}(x,y) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = -2\int_0^{2\pi} \sin t \cos t\,\mathrm{d}t = 0$$

Aber offenbar nicht immer!

Satz 8.4.3: Äquivalenz und Wegintegrale

Seien φ, ψ äquivalente, glatte Jordanwege zur Kurve $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\int_\varphi F(x)\,\mathrm{d}x = \int_\psi F(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall F : \gamma \to \mathbb{R}^n,$$

für die die Integrale existieren.

Korollar 8.4.4: Wegintegral der gegensätzlichen Orientierung

Seien $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ glatte Jordanwege zur Kurve γ, wobei $\psi \sim \varphi^-$. Dann gilt:

$$\int_\varphi F(x) \cdot \mathrm{d}x = -\int_\psi F(x) \cdot \mathrm{d}x \quad \forall F : \gamma \to \mathbb{R}^n,$$

für die das Integral existiert.

Satz 8.4.5:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet und $F : G \to \mathbb{R}^n$ stetig.
Für alle folgenden Wege gelte, dass sie rektifizierbar, Jordan'sch und stückweise stetig diffbar sind, sowie in G verlaufen ($\gamma \subseteq G$).
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) F ist ein **Gradientenfeld**, d.h. $\exists V \in C^{(1)}(G) : \ F = \nabla V$

(2) Alle Wegintegrale von F sind wegunabhängig.
$\int_\varphi F(x) \cdot \mathrm{d}x$ hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.

(3) Integrale von F über geschlossene Wege verschwinden stets:
$\oint_\varphi F(x) \cdot \mathrm{d}x = 0$

Gelten diese Aussagen, gilt für $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $F = \nabla V$:

$$\int_\varphi F(x) \cdot \mathrm{d}x = V\left(\varphi(b)\right) - V\left(\varphi(a)\right)$$

Man schreibt dann auch

$$\int_\xi^\eta F(x) \cdot \mathrm{d}x := \int_\varphi F(x) \cdot \mathrm{d}x$$

wenn $\varphi(a) =: \xi$, $\varphi(b) =: \eta$.

Satz 8.4.6: INTEGRABILITÄTSBEDINGUNGEN

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F \in C^{(1)}(G, \mathbb{R}^n)$.
Ist F ein Gradientenfeld in G, so gelten die Integrabilitätsbedingungen:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \quad \forall i,k \in \underline{n}$$

Bemerkung 8.4.7:

a) Es reicht offensichtlich, die Integrabilitätsbedingung für $i < k$ zu prüfen.
b) Im $\mathbb{R}^3$ ist die Integrabilitätsbedinung äquivalent zu $\operatorname{rot} F = 0$.
c) Die Umkehrung gilt nicht. Die Integrabilitätsbedingung ist *notwendig*, aber nicht *hinreichend* für ein Gradientenfeld.

Gegenbeispiel zu c):

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

f erfüllt die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, ist aber kein Gradientenfeld.
Siehe auch 7.3.Ü1.

Ein Satz als Einschub:

Satz 8.4.8:

Seien I, J Intervalle in $\mathbb{R}$, I kompakt, J offen, $f : I \times J \to \mathbb{R}$ stetig partiell diffbar.
Definiere $F : J \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$F(y) := \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x \text{ für } y \in J$$

$\Rightarrow F$ stetig diffbar und $F'(y) = \displaystyle\int_I \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \; \forall y \in J$.
d.h. Differentiation und Integration nach verschiedenen Variablen dürfen vertauscht werden.

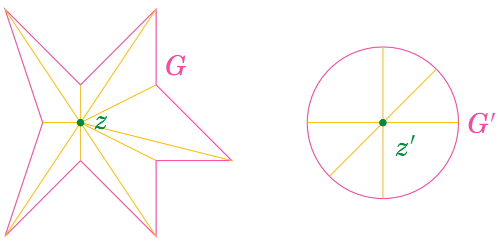
Für die Umkehrung von 8.4.6 braucht man eine Zusatzbedingung an den Definitionsbereich G:
Eine mögliche Bedingung derart ist, dass G *sternförmig* ist.

Definition 8.4.9: Sternförmiges Gebiet

Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig** (*star-shaped*), wenn es einen Punkt $z \in G$ gibt, sodass

$$\overline{zx} \subseteq G \; \forall x \in G$$

Man sagt dann auch „G ist bzgl. z sternförmig“ oder „z ist **Sternpunkt** von G“.



Satz 8.4.10:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und $F \in C^{(1)}(G, \mathbb{R}^n)$ eine Funktion, die die Integrabilitätsbedingung erfüllt.
Dann ist F ein Gradientenfeld (*hinreichende* Bedingung).

Beispiel 8.4.11:

a) Gravitationskraft eines Massenpunktes im Ursprung:

$$F(x) = -\gamma \cdot \frac{mM}{|x|^3},\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

γ: Gravitationskonstante
M: Masse des Massenpunkts
m: Masse im Gravitationsfeld
x: Vektor von Massenpunkt M zu Masse m

Das zugehörige Potenzial (im physikalischen Sinne) ist:

$$V(x) := -\gamma M \frac{1}{|x|}$$

sodass $F(x) = -m\nabla V$.
$\Rightarrow \operatorname{rot} F = 0$
Aber: $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist nicht sternförmig!
d.h.: Es gibt auch Gradientenfelder auf nicht-sternförmigen Gebieten (hinreichende Bedingung, nicht notwendig).

Nach 8.4.5 hängt die Arbeit, die im Gravitationsfeld verrichtet wird, nur vom Potenzial am Anfangs- und Endpunkt ab.

b) siehe Gegenbeispiel von 8.4.7.c).
$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$ kein Gradientenfeld, es erfüllt die Integrabilitätsbedingung, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht sternförmig.

Wir berechnen nun das Arbeitsintegral längs eines geschlossenen Weges $\varphi(t) := \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$:

$$\oint_\varphi f \cdot \mathrm{d}(x,y) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2+\cos^2}} \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}t = 2\pi \neq 0$$

Aber: Beispielsweise $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$ ist sternförmig. Damit ist $f|_H$ ein Gradientenfeld. Gemäß Beweis von 8.4.7 erhalten wir wie folgt eine Stammfunktion:

$$V(x,y) = \int_{(0,1)}^{(x,y)} f(\overline{x}, \overline{y}) \,\mathrm{d}(\overline{x}, \overline{y})$$

Wegen der Wegunabhängigkeit: verwende Polygonzug $\overline{(1,0)(x,0)(x,y)}$.

1. Teil: $\varphi(t) = \begin{pmatrix}1 + t(x-1)\\ 0\end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$

$$\Rightarrow \int_\varphi f \cdot \mathrm{d}(\overline{x}, \overline{y}) = \int_0^1 \frac{1}{\dots} \cdot \begin{pmatrix}0\\ \vdots\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x-1\\ 0\end{pmatrix} \mathrm{d}t = 0$$

2. Teil: $\psi(t) := \begin{pmatrix}x\\ ty\end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$

$$\Rightarrow \int_\psi f \cdot \mathrm{d}(\overline{x}, \overline{y}) = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + (ty)^2} \begin{pmatrix}-ty\\ x\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\ y\end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{xy}{x^2 + t^2y^2} \mathrm{d}t = \dots = \arctan \frac{x}{y}$$

$\Rightarrow V(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$ wenn $(x,y) \in H$. V ist *nicht* stetig fortsetzbar auf $\overline{H}$.

Ende des 2. Semesters.