Analysis II

Alexander Köster, *Student der Universität Siegen*

30. Juli 2018

Eine Sammlung des zusammengefassten Vorlesungs- und Übungsstoffes einiger Themen der Analysis.

Eine Sammlung einiger Inhalte der Veranstaltungen der Analysis 2 im Sommersemester 2018 der Universität Siegen ohne Beweise.

Diese Sammlung wurde unabhängig von der Universität erstellt. Alles aus der Vorlesung, dem zugehörigen Skript und den zugehörigen Übungen, was nicht in dieser Zusammenfassung enthalten ist, ist dennoch wichtig für das Verständnis oder den Beweis der gegebenen Sätze.

Inhaltsverzeichnis

5 Eindimensionale Differentialrechnung

5.1 Ableitungen

Aus dem 1. Semester, **Analysis I**:

Definition 5.1.1: Differenzierbarkeit

Bemerkung 5.1.2: Differenzierbar auf abgeschlossenen Intervallen

Satz 5.1.3: Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Satz 5.1.4: Ableitungsregeln

Satz 5.1.5: Kettenregel

Lemma 5.1.6: Ableitung der Umkehrfunktion

Ende des 1. Semesters. Ab hier **Analysis II**.

Beispiel 5.1.7: Differenzierbarkeit von Polynomen

Liste wichtiger Ableitungen:

Definition 5.1.8: Stetige Differenzierbarkeit

5.2 Zentrale Sätze

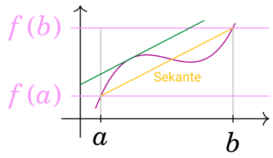
Satz 5.2.1: Satz von Rolle

Satz 5.2.2: Mittelwertsatz der Differentialrechnung („MWS Diff“)

Korollar 5.2.3:

Definition 5.2.4: Umgebung

Betrachte folgende Grenzwerte:



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^{ax}}, \quad a>0,\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$$

Zähler und Nenner $\longrightarrow +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$$

Zähler $\longrightarrow -\infty$, Nenner $\longrightarrow +\infty$
Das ist ein Problem. Lösung (in den meisten Fällen):

Satz 5.2.5: L'Hôpital'sche Regel

Beispiel 5.2.6: L'Hôpital

Satz 5.2.7: Satz von Taylor

Das Restglied entspricht dem Fehler bei der Taylorentwicklung. Für eine beliebig oft diffbare Funktion f, für die $R_{n,\xi}(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ konvergiert, konvergiert das Taylorpolynom zur Taylorreihe, und ist die Potenzreihenentwicklung dieser Funktion (wegen dem Identitätssatz für Potenzreihen eindeutig).

Definition 5.2.8: Extrema

Satz 5.2.9: Extrema durch Ableitungen

Bemerkung 5.2.10:

Beispiel 5.2.11:

Satz 5.2.12:

5.3 Folgen und Reihen von Funktionen II

Bemerkung 5.3.1: DIFFERENTIATION IN $\mathbb{C}$

Beispiel:

a) $f(z) = z^2$, $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{(z+h)^2-z^2}{h} = \frac{z^2+2hz+z^2-z^2}{h} = 2z + h \xrightarrow{h\to 0} 2z \Rightarrow f$ komplex diffbar, $f'(z) = 2z$

b) $f(z) = |z|$. Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z_0 = re^{i\varphi}$, $r > 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi[$
$f(z_0 + h) - f(z_0) = |z_0 + h| - |z_0|$
Spezielle Annäherung für $h \to 0$: $z_0 + h_n := re^{i(\varphi + \frac{1}{n})}$
Andere Annäherung: $z_0 + \tilde{h}_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{i\varphi}$ d.h. $\tilde{h} := -\frac{1}{n} re^{i\varphi}$
$\Rightarrow f$ in **keinem** $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex diffbar. Aber: f in $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ reell diffbar, nur in $z_0 = 0$ nicht.

Also: reell diffbar $\not\Rightarrow$ komplex diffbar.

Satz 5.3.2: SATZ ÜBER GLIEDWEISE DIFFERENTIATION

Beispiel 5.3.3: GLIEDWEISE DIFFERENTIATION

Satz 5.3.4: LOKALE ENTWICKELBARKEIT IN EINE POTENZREIHE

Nicht jede $C^{(\infty)}$-Funktion ist (lokal) in eine Potenzreihe entwickelbar (d.h. analytisch)!

Beispiel 5.3.5:

(**Beachte:** Aus „$f'(x)$, $x \neq x_0$ gegeben" und „$\lim_{x \to x_0} f'(x)$ existiert" folgt nicht generell die Diffbarkeit von f in x_0.)

Übung 5.3.Ü1:

⋮

Differentialgleichung:
$f'(x) = cf(x)$, $c \in \mathbb{R}$ konstant.

Potenzreihenansatz: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$
Also: $f' = cf \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c a_n n x^{n-1}$

Wegen Identitätssatz für Potenzreihen: $a_{n+1}(n+1) = ca_n \ \forall n \in \mathbb{N}_0$
$\Longrightarrow a_n = a_0 \frac{c^n}{n!}$ Übung aus Analysis I.

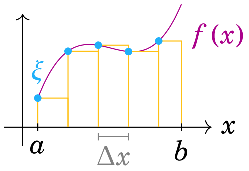
$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \frac{c^n}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cx)^n}{n!} = a_0 e^{cx}$$

a_0 frei wählbar (Anfangsbedingung).

$\rightarrow$ Wachstums- oder Zerfallsprozesse.

6 Das Riemann-Integral in $\mathbb{R}^1$

	Mathematik (Leibniz)	**Physik (Newton)**
Problem:	Berechnung komplizierter Flächen	Berechnung Energie/Arbeit
Einfacher Fall:	Rechteck mit Seitenlängen a, b, Fläche $= a \cdot b$	Kraft konstant längs des Weges, Arbeit = Kraft · Weg
Komplizierter:	$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Funktion. Gesucht: Fläche zwischen Graph von f und x-Achse.	$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ skalares Kraftfeld entlang des 1-dimensionalen Weges $[a,b]$ Gesucht: Verrichtete Arbeit.
Idee:	Annäherung durch kleine (schmale) Rechtecke z.B. konst. Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$	Unterteilung des Weges in kleine Stücke mit näherungsweise konstanter Kraft. Stücke: $\left[a + i\frac{b-a}{n},\ a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right] =: I_i$ (n Intervalle, $i \in \underline{n}$).



	Fläche des i-ten Rechtecks: $f(\xi_i) \cdot \Delta x$.	Arbeit für Teilstück I_i: $f_i \cdot \Delta x$; f_i = Kraft auf Teilstück I_i, $\approx f(\xi_i)$ für ein $\xi_i \in I_i$.
	Fläche $\approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x$	Gesamtarbeit $\approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x$

tatsächliche Fläche/Arbeit:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\xi_i^{(n)}\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

6.1 Definition & einfache Eigenschaften

Definition 6.1.1: Zerlegung und Riemann-Summen

Betrachtet werden muss nun für *jedes* $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ *jede* Zerlegung $Z^{(n)}$, ähnlich Grenzwerte.

Lemma 6.1.2:

Definition 6.1.3: Riemann-Integrale

Achtung: Wir benutzen nirgendwo Beträge. „Flächeninhalt unter dem Graphen" gilt also nur *über* der x-Achse.

Lemma 6.1.4: Riemann-Integrabilitätskriterium

Beispiel 6.1.5: Riemann-Integrierbarkeit

Definition 6.1.6:

Lemma 6.1.4 gilt auch für R.-S.-Integrale.

Beispiel 6.1.7: Heaviside/Dirac

Satz 6.1.8: Weitere Integrabilitätskriterien

Ab jetzt: $\sigma(x) = x$. Also:

$$f \text{ diffbar auf } [a,b] \Rightarrow f \text{ stetig auf } [a,b] \Rightarrow f \text{ R.-intbar}$$

$$\nLeftarrow \qquad\qquad \nLeftarrow$$

z.B.: $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ $\qquad f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lfloor x \rfloor$

Bzgl. der Gaußklammer: $[x] := \lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$ „abrunden“, unstetig in 0.

Sei Z Zerlegung von $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, sei $I_{\tilde{j}}$ das Intervall mit der Eigenschaft, dass $x_{\tilde{j}-1} < 0 \leq x_{\tilde{j}}$. $\Rightarrow M_{\tilde{j}} = 0,\ m_{\tilde{j}} = -1$. Für alle anderen Intervalle ist f konstant $(M_j = m_j)$.

$$\Rightarrow S(Z) - s(Z) = (0 - (-1)) \cdot l_{\tilde{j}} = l_{\tilde{j}}$$

Durch Verfeinerung der Zerlegung kann $l_{\tilde{j}}$ beliebig klein werden. Wegen dem Integrabilitätskriterium (Lemma 6.1.4): f R-intbar auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Aber eben unstetig in 0.

Alternativ: $\lfloor x \rfloor$ ist monoton wachsende Funktion. $\Rightarrow$ R.-intbar.

Definition 6.1.9: Riemann-Zwischensumme

Satz 6.1.10: (Definition nach Riemann)

Satz 6.1.11: Eigenschaften des Riemann-Integrals

Definition 6.1.12: Umkehren der Integrationsgrenzen

Bemerkung 6.1.13: Integral für komplexwertige Funktion

Lemma 6.1.14:

Übung 6.1.Ü1:

Übung 6.1.Ü2: Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung (CSB)

6.2 Zentrale Sätze

Satz 6.2.1: Mittelwertsatz der Integralrechnung

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ heißt **Integral-Mittelwert** von f.

Satz 6.2.2: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HSDI)

Tabelle von Stammfunktionen:

$f = F'$	F ($\pm$ Konstante)
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha-1}, \alpha \neq -1$ bzw. $\ln\lvert x\rvert,\ \alpha = -1$

Die Differenzierbarkeitsordnung wird oft als Maßfür die „Glattheit“ einer Funktion angesehen, d.h. Integrieren „glättet“ eine Funktion und Ableiten „raut“ eine Funktion auf.

Beispiel 6.2.3: HSDI

d.h. man schreibt $F(x)\big|_a^b := F(b) - F(a)$

Satz 6.2.4: Partielle Integration (*Integration by parts*)

Beispiel 6.2.5: Anwendungen partieller Integration

Satz 6.2.6: Substitutionsregel

Beispiel 6.2.7: Anwendungen der Substitutionsregel

Definition 6.2.8: Unbestimmtes Integral

Beachte:

Beispiel 6.2.9:

Daher schreibt man oft auch eine Stammfunktion als Repräsentant. Das $+\text{const.}$ stimmt für stückweise definierte Funktionen ohnehin nicht mehr, also kann man es auch weglassen, wenn der Zusammenhang klar ist.

Beispiel 6.2.10: Partialbruchzerlegung

Alternative zum Koeffizientenvergleich: **Einsetzmethode/Zuhaltetechnik**

Bsp.: $f(x) := \frac{8x+9}{(x+2)(x^2+6x+9)} = \frac{8x+9}{(x-2)(x+3)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$, n Unbekannte $(n=3)$.

- Hauptnenner bilden, Zähler:

  $8x+9 = A(x+3)^2 + B(x-2)(x+3) + C(x-2)$,

  zunächst $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$, durch stetige Fortsetzung $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Einsetzen von n Punkten, inkl. Nullstellen des Nenners

  $x = -3: \; -15 = C \cdot (-5) \Rightarrow C = 3$

  Wegen Nullstellenfaktoren fallen die anderen Unbekannten weg. Deshalb auch „Zuhalten".

  $x = 2: \; 25 = A \cdot 25 \Rightarrow A = 1$

  Wegen doppelter Nullstelle gibt es keinen dritten einfachen Punkt. Wähle zum Schluss „irgendeinen" Punkt, der sich z.B. einfach berechnen lässt.

  z.B. $x = 0: \; 9 = 9 + B \cdot (-6) + (-6) \Rightarrow B = -1$

  $$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+3} + \frac{3}{(x+3)^2}$$

  $$\Rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| - \ln|x+3| - \frac{3}{x+3} + \text{const.}$$

Folgende Terme können bei einer Partialbruchzerlegung allgemein auftauchen:

- x^k, $k \in \mathbb{N}$, $\int x^k \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1} x^{k+1}$
- $\frac{1}{(x-a)^k}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, Substituiere $t = x - a$, $\int \frac{1}{t^k}\,\mathrm{d}t \;\ldots$
- $\frac{ax+b}{(x^2+2cx+d)^k}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c^2 < d$ $\rightarrow$ verschiedene Substitutionen (sofern möglich)

im Zweifelsfall konsultiert man Integraltabellen, z.B. Bronstein, Semendjajew.

Beispiel 6.2.11:

6.3 Uneigentliche Integrale

Definition 6.3.1: Uneigentlich integrierbar

Beispiel 6.3.2: Uneigentliche Integrale

Satz 6.3.3:

Lemma 6.3.4:

Satz 6.3.5:

Beispiel 6.3.6:

Definition 6.3.7: Cauchy'scher Hauptwert

Satz 6.3.8: Integralkriterium für Reihen

Beispiel 6.3.9: Integralkriterium

Übung 6.3.Ü1: Integralkriterium

⋮

Für $\alpha = 0$ gilt:
Sei $c \in]e, +\infty[$.

$$\int_2^c \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_2^c \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x \underset{g(x):=\ln x}{\overset{\text{Substitution}}{=}} \int_{\ln 2}^{\ln c} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HSDI}}{=} \ln|x|\Big|_{\ln 2}^{\ln c} = \ln|\ln c| - \ln|\ln 2| \xrightarrow[\ln\nearrow]{c\to\infty} +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha} = +\infty \text{ für } \alpha = 1$$

Sei nun also $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $c \in]1, +\infty[$.

$$\int_1^c \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_1^c \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)}\cdot\underbrace{(\ln x)^{-\alpha}}_{v(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{p.I.}}{=} \underbrace{\frac{\ln x}{(\ln x)^\alpha}}_{u(x)v(x)}\Big|_1^c - \int_1^c \underbrace{\ln x}_{u(x)}\cdot\underbrace{(-\alpha)(\ln x)^{-\alpha}}_{v'(x)}\,\mathrm{d}x = (\ln x)^{-\alpha+1}\Big|_1^c + \alpha\int_1^c \frac{1}{x}(\ln x)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x \qquad \| -\textstyle\int_1^c \dots$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha)\int_1^c \frac{1}{x}(\ln x)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = (\ln|c|)^{-\alpha+1} - (\ln|1|)^{-\alpha+1} \qquad \| \cdot \tfrac{1}{1-\alpha}\dots$$

$$\Leftrightarrow \int_1^c \frac{1}{x}(\ln x)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{(\ln c)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}$$

Bei $c \to +\infty$ gilt: $\ln c \longrightarrow +\infty$. Ist $\alpha < 1$, so steht $\ln c$ im Zähler. Ist $\alpha > 1$, steht $\ln c$ im Nenner.

$$\Rightarrow \int_1^c \frac{1}{x}(\ln x)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{c\to+\infty} \begin{cases} +\infty & \alpha < 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

Analog dazu ist $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}(\ln x)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = +\infty$ für $\alpha < 1$. $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ konvergent $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

(Geht aber auch ohne Integralkriterium über Cauchy'schen Verdichtungssatz.)

6.4 Folgen und Reihen von Funktionen III

Satz 6.4.1: Satz über gliedweise Integration

Auch hier wieder: Vertauschen von Grenzwerten (Integral ist auch Grenzwert).

Entsprechend für Reihen: Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ R.-intbar $\forall n$ und konvergiere $\sum_{n=0}^{N} f_n \xrightarrow{N\to\infty} f$ *gleichmäßig*.

$$\Rightarrow f \text{ R.-intbar und } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel 6.4.2: Fourier-Reihen

Korollar 6.4.3: Potenzreihenintegration

Satz 6.4.4: Satz über gliedweise Differentiation (verallgemeinert)

Übung 6.4.Ü1: Raum der stetig diffbaren Funktionen

6.5 Banachräume und Differentialgleichungen

Satz 6.5.1:

Ein **Operator** ist eine Abbildung von unendlich-dimensionalem Raum in unendlich-dimensionalem Raum.

Operatorennorm: $\|\Phi\| := \sup\limits_{\substack{g \in C(I) \\ g \neq 0}} \frac{\|\Phi(g)\|_{C(I)}}{\|g\|_{C(I)}} \leq b - a.$ → Funktionalanalysis

Anwendung 6.5.2: Differentialgleichung (DGL)

Übung 6.5.Ü1: Weitere DGL/AWP

7 Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

7.1 Partielle und totale Ableitungen

Vorbemerkung:

- $e^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ ist ein Vektor $(0,\ldots,1,\ldots,0) = \left(\delta_{ij}\right)_{i\in\underline{n}}$
- bei Vektoren: oberer Index ist Nummerierung, unterer Index ist Bezug auf Komponente.
  $e^{(2)} = (0,1)$ in $\mathbb{R}^2$, $e^{(2)}_0 = 0,\ e^{(2)}_1 = 1$
- Koordinatenrichtungen: $x_1,\ldots,x_n$ oder x,y,z (je nach Zusammenhang).

Definition 7.1.1: Partielle Differenzierbarkeit

- Ist 1-dimensionale Ableitung! Alle anderen Variablen ($x_i,\ i \neq j$) als konstant annehmen und als 1-D-Funktion von x_j ableiten.
- Entsprechend Ableitungsregeln übertragen, soweit sinnvoll.

Beispiel 7.1.2: Partielle Ableitungen

Also: partiell diffbar $\not\Rightarrow$ stetig

Definition 7.1.3: Totale Differenzierbarkeit

Definition 7.1.4: Landau-Symbole

Bemerkung 7.1.5:

Satz 7.1.6:

Definition 7.1.7: Jacobi-Matrix

Beispiel 7.1.8:

Es gilt analog zu 1-D:
Seien f,g total diffbar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.
$\Rightarrow f+g,\ \lambda f$ total diffbar und $(f+g)' = f' + g',\ (\lambda f)' = \lambda f'$.

Lemma 7.1.9:

Satz 7.1.10:

Beispiel 7.1.11:

Definition 7.1.12: Gradient

Definition 7.1.13: Nabla- und verwandte Operatoren

Beispiel 7.1.14:

Definition 7.1.15: Richtungsableitung

Übung 7.1.Ü1: Gegenbeispiel Richtungsableitungen und totale Diffbarkeit

7.2 Höhere Ableitungen

entsprechend 1-D (falls Grenzwert existent):

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right)=\lim_{\substack{h\to 0\\(h\in\mathbb{R})}}\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}+he^{(j)}\right)-\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right)}{h}:=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\left(x^{(0)}\right):=f_{x_ix_j}\left(x^{(0)}\right)$$

Achtung Reihenfolge! In allen Schreibweisen: „Das, was näher an f dran ist, zuerst."
D.h.: bei letzterem andersrum als bei Bruchschreibweise.

Definition 7.2.1: Gebiet

Definition 7.2.2: Räume stetig partiell diffbarer Funktionen

Satz 7.2.3: Satz von Schwarz

Satz 7.2.4: Satz von Schwarz II

Also gilt: In $\mathrm{C}^{(k)}(G,\mathbb{R}^m)$ sind die gemischten Ableitungen bis einschließlich Ordnung k unabhängig von der Reihenfolge der Bildung.

$$\frac{\partial^4}{\partial x_1\partial x_2^2\partial x_3}=\partial_1\left(\partial_2^2(\partial_3 f)\right)=\partial_2(\partial_3(\partial_2(\partial_1 f)))=\dots$$

Beispiel 7.2.5:

Definition 7.2.6: Hessematrix

Für $f\in\mathrm{C}^{(2)}(G)$ ist $H_f(x)$ eine symmetrische Matrix (d.h. $H_f(x)^{\mathrm{T}}=H_f(x)$) wegen Satz von Schwarz.

7.3 Zentrale Sätze

Satz 7.3.1: Kettenregel

Korollar 7.3.2:

Bemerkung 7.3.3:

Beispiel 7.3.4: Polarkoordinaten

Satz 7.3.5:

Definition 7.3.6: (Mehrdimensionale) Stammfunktion

Korollar 7.3.7: Integrabilitätsbedingung

Übung 7.3.Ü1: Gegenbeispiel zur Umkehrung der Integrabilitätsbedingung von Gradientenfeldern

Satz 7.3.8: MWS Diff (mehrdimensional)

Satz 7.3.9: Satz von Taylor (mehrdimensional)

Definition ergänzend zu 7.3.9: Multiindizes

Satz 7.3.9': Satz von Taylor (mit Multiindizes)

Übung 7.3.Ü2: Multinomialsatz

Satz 7.3.10: Extrema ohne Nebenbedingung

Aus reeller linearer Algebra: Definitheit einer Matrix

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix.

- A heißt **positiv semidefinit** $:\Leftrightarrow x^{\mathrm{T}} A x \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- A heißt **positiv definit** $:\Leftrightarrow A$ positiv semidefinit und $x^{\mathrm{T}} A x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- A heißt **negativ definit** $:\Leftrightarrow -A$ positiv definit.
- A heißt **indefinit** $:\Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R}^n : x^{\mathrm{T}} A x > 0,\ y^{\mathrm{T}} A y < 0$

A ist positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind ≥ 0 (d.h. in $\mathbb{R}_0^+$)
$\Leftrightarrow$ alle Hauptminoren sind ≥ 0 (d.h. in $\mathbb{R}_0^+$)

A ist positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind > 0 (d.h. in $\mathbb{R}^+$)
$\Leftrightarrow$ alle Hauptminoren sind > 0 (d.h. in $\mathbb{R}^+$)

Achtung! Alle Hauptminoren $< 0 \not\Rightarrow A$ negativ definit!

Die **Minoren** von A sind die Determinanten der quadratischen Teilmatrizen von A.
Die **Hauptminoren** sind die Determinanten der quadratischen Teilmatrizen von A, die durch Streichen der letzten Zeile(n) und letzten Spalte(n) von A entstehen,
d.h. die k-te Hauptminore ist $H_k := \det \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k,1} & \cdots & A_{k,k} \end{pmatrix}$ für $k \in \underline{n}$.

Bsp.: Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Dann sind die Hauptminoren: $H_1 := \det(1)$, $H_2 := \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $H_3 := \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Beispiel 7.3.11:

7.4 Geometrisches

Beispiel 7.4.1: Tangenten

Definition 7.4.1': Tangentialhyperebene

Beispiel 7.4.2: Halbkugel (Einheitskugel)

7.5 Umkehrsatz, implizite Funktionen und Lagrange-Multiplikatoren

Zur Erinnerung: 1-D-Fall

Sei $f:[a,b]=:I\to f(I), f\in C^{(1)}(I)$.
$f'\neq 0$ auf $I\Rightarrow f$ ist streng monoton mit Vorzeichen von f'.
$\Rightarrow \exists f^{-1}=:g$, diffbar auf $f(I)$ (Definitionsbereich) und $g'(y)=\frac{1}{f'(g(y))}$.

Jetzt: $f:\mathbb{R}^n\supseteq G\to\mathbb{R}^n,\ f(x)=y,\ x=?$

Definition 7.5.1: Regularität und Invertierbarkeit (mehrdimensional)

Lemma 7.5.2:

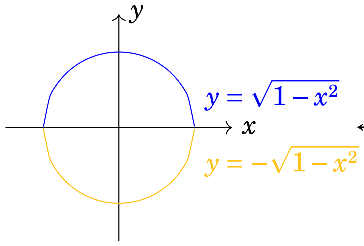
Vorbemerkung 7.5.3:

Übung 7.5.Ü1: Verträgliche Normen

Satz 7.5.4: Umkehrsatz / Satz von der inversen Abbildung

Beispiel 7.5.5: Kreiskoordinaten/Polarkoordinaten

Betrachte nun: $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2=1\right\}$ *implizite* Darstellung des Einheitskreises.



⟵ *explizite* Darstellung

hier: nicht global in explizite Darstellung auflösbar.
($x = \cos\varphi,\ y = \sin\varphi;\ \varphi \in [0, 2\pi[$ ist *Parameterdarstellung*.)

Ob und wie man eine explizite Darstellung finden kann, sagt der:

Satz 7.5.6: Satz über implizite Funktionen

d.h. letztendlich: „Kann man ein (nicht-lineares) GLS nach bestimmten Variablen auflösen?“
reiner Existenzsatz!

Korollar 7.5.7:

Bemerkung: Eventuell Variablen $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ umordnen, allgemein:

$$\mathrm{Rang}\left(f'\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)\right) \text{ maximal (d.h. } = m)$$

wieder: **reiner Existenzsatz**.

Extrema mit Nebenbedingungen (Nb.)

z.B.: minimiere $f(x) = e^{x_1^3+x_2^2}$ unter allen x mit $|x|^2 = 1$ $(g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0)$.

Idee: Einsetzen von $x_2 = \pm\sqrt{1 - x_1^2}$. Aber: $\sqrt{x^2} = |x|$ in 0 nicht differenzierbar...

besser:

Satz 7.5.8: Lagrange-Multiplikator-Regel

Beispiel 7.5.9:

8 Integration längs Kurven und Wegen

8.1 Kurven und Wege

Definition 8.1.1: Kurve und Weg

Beispiel 8.1.2:

Definition 8.1.3: Äquivalenzrelation

Beispiel 8.1.4:

Definition 8.1.5: Äquivalenz von Wegen

Satz 8.1.6:

Satz 8.1.7:

8.2 Weglänge

Gesucht: Länge einer Kurve $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Weg $\varphi : I \to \gamma$.
Idee: Approximation durch Polygonzüge, basierend auf einer Zerlegung Z des Intervalls I (ähnlich wie bei Riemann-Integral).

Definition 8.2.1: Weglänge

Satz 8.2.2:

Satz 8.2.3:

Man kann deshalb auch von einer **Kurvenlänge** sprechen, also $L(\varphi(I)) := L(\varphi)$.

Ist $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, dann ist $\varphi\big|_{[a,t]}$ $\forall t \in \,]a,b]$ auch ein Weg.

Definition 8.2.4: Bogenlänge

Satz 8.2.5:

Beispiel 8.2.6:

Beispiel 8.2.6:

Bemerkung 8.2.7: Tangente und Normale

Satz 8.2.8:

8.3 Kurvenintegrale

Schwerpunkt von n Massepunkten
Seien die Massen $m_1, \ldots, m_n$ an den Orten $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$.
Schwerpunkt: $s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x^{(i)}$
Gesamtmasse: $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Wie sieht das bei kontinuierlich verteilten Massen aus?
Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ ein Weg und $\rho : \varphi(I) \to \mathbb{R}$ die lineare Dichte (Masse pro Längeneinheit). Wir unterteilen die Kurve in Teilstücke gemäß einer Zerlegung Z von I.
Für die Gesamtmasse M gilt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \inf_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \rho\left(\varphi(t)\right)(s(t_{i+1}) - s(t_i)) \leq M \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \rho\left(\varphi(t)\right)(s(t_{i+1}) - s(t_i))$$

Diese Unter- und Obersummen führen zu dem Riemann-Stieltjes-Integral $\int_a^b \rho\left(\varphi(t)\right) \mathrm{d}s(t)$,

Definition 8.3.1: Kurvenintegral

Satz 8.3.2:

Wir befassen uns nun genauer mit dem R.-S.-Integral

$$\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}\sigma(t)$$

Hierbei lassen wir die Bedingung fallen, dass σ monoton wachsend ist.

Definition 8.3.3: Variation

Satz 8.3.4: Raum der Funktionen beschränkter Variation

Übung 8.3.Ü1:

Satz 8.3.5:

Satz 8.3.6: Darstellungssatz von Jordan

Satz 8.3.7:

Da die Bogenlänge s monoton wachsend ist, ist sie nach 8.3.5 von beschränkter Variation. Somit existiert das Kurvenintegral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}s$ für alle stetigen Funktionen f.
Nach Satz 8.2.5 ist s außerdem stetig diffbar, wenn φ stetig diffbar ist. In diesem Fall gilt noch mehr.

Satz 8.3.8:

Korollar 8.3.9:

Beispiel 8.3.10:

8.4 Wegintegrale

Definition 8.4.1: Wegintegral

Die bekannten Rechenregeln für R.-(S.)-Integrale übertragen sich auf das Wegintegral, insbesondere für stückweise stetig diffbare φ, da dann nach Satz 8.3.8 gilt:

$$\int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}x_k = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi_k'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_\varphi F(x)\cdot\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_a^b F_k(\varphi(t))\,\varphi_k'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b F(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Beispiel 8.4.2:

Das *Wegintegral* ist also *wegabhängig*.

Beispiel 8.4.2:

Aber offenbar nicht immer!

Satz 8.4.3: Äquivalenz und Wegintegrale

Korollar 8.4.4: Wegintegral der gegensätzlichen Orientierung

Satz 8.4.5:

Satz 8.4.6: Integrabilitätsbedingungen

Bemerkung 8.4.7:

Gegenbeispiel zu c):

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

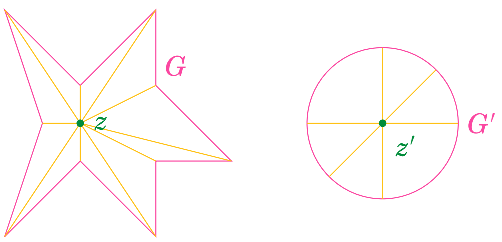
f erfüllt die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, ist aber kein Gradientenfeld.
Siehe auch 7.3.Ü1.

Ein Satz als Einschub:

Satz 8.4.8:

Für die Umkehrung von 8.4.6 braucht man eine Zusatzbedingung an den Definitionsbereich G:
Eine mögliche Bedingung derart ist, dass G *sternförmig* ist.

Definition 8.4.9: Sternförmiges Gebiet



Satz 8.4.10:

Beispiel 8.4.11:

Ende des 2. Semesters.