Analysis I

Alexander Köster, *Student der Universität Siegen*

22. Februar 2018

Eine ultrakompakte Sammlung einiger der allerwichtigsten, schwer zu merkenden Sätze.

Eine Zusammenfassung der Veranstaltungen der Analysis 1 im Wintersemester 2017/18 der Universität Siegen.

Diese Zusammenfassung ersetzt keine Klausurvorbereitung. Sie wurde unabhängig von der Universität erstellt und beinhaltet kaum etwas, aus dem man lernen kann, nur anwenden, wenn man es bereits kennt.
Alles aus der Vorlesung, dem zugehörigen Skript und den zugehörigen Übungen, meiner Zusammenfassung oder meinem Kompaktmerkzettel, was nicht in *dieser* Zusammenfassung enthalten ist, ist dennoch wichtig für das Verständnis oder den Beweis der gegebenen Sätze.

Die Nummerierung in dieser Zusammenfassung entspricht **nicht** der Nummerierung in einer Vorlesung. Sie sollte nicht zum Lernen verwendet werden, nur zur chronologischen Orientierung.
Sie entspricht der Nummerierung aus meiner kompletten Zusammenfassung, daher „fehlen" einige Nummern.
Die Namen wichtiger Sätze zu lernen ist sinnvoller!

Satz 1.3.9: Geometrische Summe

Für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Satz 1.3.10: Archimedische Anordnung

$\mathbb{R}$ ist ein **archimedisch angeordneter Körper**, d.h.: $\forall a, b \in R$ mit $a, b > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : na > b$.
$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}^+\ \exists n \in \mathbb{N}:\ 0 < \frac{1}{n} < a$

Satz 1.3.15: Bernoulli'sche Ungleichung

$\forall x \in [-1,\ +\infty[\setminus \{0\}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 :\ (1+x)^n > 1 + nx$

Satz 1.4.6: AGM-Ungleichung

Seien $a_1, \dots, a_n \geq 0$. Dann gilt: $\underbrace{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}}_{\text{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k}_{\text{arithmetisches Mittel}}$

Beispiel 2.1.14: Ein paar Folgen

- Sei $x_1 := 1,\ x_{n+1} := \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}$. Es gilt: $(x_n) \longrightarrow \sqrt{2}$
- Sei $x_n := \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n$ mit $m \in \mathbb{Z},\ n > |m|$. Es gilt: $(x_n) \longrightarrow e^m$ So wird die **Eulersche Zahl** e definiert.
- $\frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0,\ \frac{n!}{n^n} \longrightarrow 0,\ \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1,\ \sqrt[n^2]{n!} \longrightarrow 1$

Satz 2.1.19: Satz von Bolzano-Weierstrass für Folgen

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. (Gilt nicht in $\mathbb{Q}$!)
Äquivalent: Jede beschränkte Folge hat *mindestens* einen Häufungswert in $\mathbb{R}$ (*ohne* $\pm\infty$).

Satz 2.1.21: Eigenschaften der Cauchy-Folge

a) Jede kovergente Folge ist Cauchy-Folge.
b) Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.
c) Jede Cauchy-Folge ist konvergent in $\mathbb{R}$ (nicht in $\mathbb{Q}$!).

Satz 2.2.3: Cauchy'sches Konvergenzkriterium

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)\ \forall n, m \geq n_0(\varepsilon),\ m > n : \left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

$\rightarrow\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (Restglied) und $a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Beispiel 2.2.5: Wichtige Reihen

b) **Geometrische Reihe:** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$.

Beispiel 2.2.10: Riemann'sche Zeta-Funktion

- $\dots \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

Satz 2.2.11: Quotientenkriterium (*Ratio test*)

Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ fest und $\forall k \geq k_0 : a_k > 0$.

1. $\exists 0 < q < 1 : \exists k_1 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_1 : \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent
2. $\exists k_1 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_1 : \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$
3. $\limsup \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert

Satz 2.2.12: Wurzelkriterium (*Root test*)

Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ fest und $\forall k \geq k_0 : a_k > 0$.

1. $\exists 0 \leq q < 1 : \exists k_1 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_1 : \sqrt[k]{a_k} \leq q \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent
2. $\exists k_1 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_1 : \sqrt[k]{a_k} \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$
3. $\limsup \sqrt[k]{a_k} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert

Satz 2.2.15: Leibnizkriterium (*Alternating series test*)

Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ **alternierend** (d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : \operatorname{sgn}(a_n a_{n+1}) = -1$), und ($|a_n|$) eine *monoton fallende Nullfolge*.

Dann konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und es gilt $\underbrace{\left| \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \right|}_{=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\text{: Restglied}} \leq |a_{n+1}|$.

Satz 2.2.17: Verdichtungssatz von Cauchy (*Cauchy condensation theorem*)

Seien $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 0$ und $(a_n) \searrow$. Dann gilt: $\sum_{n=0}^{\infty}$ konvergiert $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert

Satz 2.2.21: Cauchyprodukt

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent.

Dann ist die **Produktreihe** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_k = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_k\right)$ konvergent. Insbesondere gilt $c_n = \sum\limits_{\substack{k,l=0 \\ k+l=n}}^{n} a_k b_l$

Also: $c_0 = a_0 b_0,\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0,\ c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0,\ \dots$

Satz 2.3.6: Hauptsatz

Sei $\mathbb{K}$ ein archimedisch angeordneter Körper. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. **Supremum-Eigenschaft**: Jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{K}$ besitzt ein Supremum.
2. **Dedekind'scher Schnitt**: Jeder Dedekind'sche Schnitt hat genau eine Schnittzahl.
3. **Monotoniekriterium**: Jede nach oben beschränkte monoton wachsende Folge ist konvergent.
4. **Intervallschachtelungseigenschaft**: Jede Intervallschachtelung zieht sich auf genau einen Punkt zusammen.
5. **Satz von Bolzano-Weierstraß**: Jede beschränkte Folge hat min. eine konvergente Tf.
6. **Vollständigkeit**: Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ ist konvergent.

Satz 3.1.22: Banach'scher Fixpunktsatz

Sei (E,d) ein *vollständiger* metrischer Raum und $f: E \to E$ eine Abbildung, die **kontrahierend** ist, d.h. $\exists q \in]0,1[$, sodass $\forall x,y \in E: \; d(f(x), f(y)) \leq q\, d(x,y)$.
Dann hat f genau einen **Fixpunkt**, d.h. ein $\hat{x} \in E$ mit $f(\hat{x}) = \hat{x}$, wobei $\hat{x}$ der Grenzwert der Folge definiert durch $x_0 \in E$ beliebig, $x_{n+1} := f(x_n)$ ist, und es gelten die Fehlerabschätzungen

a) **A-priori:** $d(x_n, \hat{x}) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$

b) **A-posteriori:** $d(x_n, \hat{x}) \leq \frac{q}{1-q} d(x_n, x_{n-1})$ (genauer)

Definition 4.1.1: Folgenstetigkeit

Eine Funktion $f: D \to W$ ist

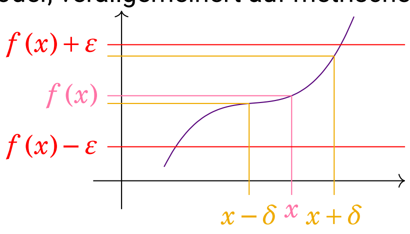
a) **stetig** (*continuous*) **in** $x \in D :\Leftrightarrow \forall$ Folge (y_n) mit $y_n \longrightarrow x$ gilt: $f(y_n) \longrightarrow f(x)$.

b) f stetig in $\xi \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$

c) **stetig**, falls f stetig in allen $x \in D$ ist.

Satz 4.1.2: Epsilon-Delta-Kriterium für Stetigkeit

Funktion $f: D \to W$ ist stetig in $x \in D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0: \forall y \in D: \; (|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$
oder, verallgemeinert auf metrische Räume (E,d), alternativ: $d(y,x) < \delta \Rightarrow d(f(y), f(x)) < \varepsilon$



„Es gibt ein δ, sodass die Fkt.-werte im ε-Schlauch bleiben"

Definition 4.1.3: Lipschitzstetigkeit & gleichmässige Stetigkeit

Sei $f: D \to W$ eine Funktion. f heißt

a) **Lipschitzstetig** oder Lipschitzsch/Lipschitzabbildung, falls gilt:
$\exists L > 0$ (**Lipschitzkonstante**), sodass $\forall x,y \in D: \; |f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$.
- Allgemein für metrische Räume: $d_D(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_W(x,y)$
- Eine Kontraktion ist Lipschitzabbildung mit $L < 1$.

b) **gleichmäßig stetig** (*uniformly continuous*), falls gilt:
$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta(\cancel{x}) > 0\; \forall x,y \in D: (|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$

Satz 4.1.4: Zusammenhang der Stetigkeiten

Es gilt: Lipschitzstetig $\Rightarrow$ gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ stetig
Die Umkehrung gilt jeweils i.A. *nicht*.

Beispiel 4.1.5: Wichtige stetige Funktionen

- Jedes Monom und nach GWS damit jedes Polynom ist stetig.
- Jede Metrik und damit jede Norm ist stetig.
- $\exp x$ ist stetig.
- $\sqrt{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R}_0^+$.
  Aber: $\sqrt{x}$ ist *nicht* Lipschitzstetig auf $\mathbb{R}_0^+$, aber Lipschitzstetig auf $[a,\infty[\ \forall a > 0$.
- $\frac{1}{x}$ ist stetig! (nicht definiert in $0 \to 0$ ist „egal" für Stetigkeit)
  $\frac{1}{x}$ ist *nicht* gleichmäßig stetig (bei $\varepsilon = 1$ gibt es kein passendes δ).
- $\ln x$ ist stetig auf $\mathbb{R}^+$.
- $\sqrt[n]{x}$ stetig auf $\mathbb{R}_0^+$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Satz 4.2.6: Zwischenwertsatz (ZWS) (*Intermediate-value theorem*)

Seien $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und $a \le \alpha < \beta \le b$.
Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ an,
d.h. $\forall \eta \in [f(\alpha), f(\beta)] : \exists \xi \in [\alpha, \beta]$ mit $f(\xi) = \eta$.

Satz 4.2.11: Eigenschaften stetiger Funktionen auf Kompakta

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ *stetig* und $D \subseteq \mathbb{R}$ *kompakt*. Dann gilt:

a) $f(D)$ ist kompakt.
b) f ist beschränkt, d.h. $\exists a, b \in \mathbb{R}\ \forall x \in D : a \le f(x) \le b$
c) f nimmt Minimum und Maximum auf D an, d.h. $\exists c, d \in D : \forall x \in D : f(c) \le f(x) \le f(d)$.
   $f(c)$ heißt **Minimum** von f, $(c, f(c))$ heißt **Tiefpunkt** vom Graphen von f und c heißt **Minimierer** von f. Analog **Maximum, Hochpunkt, Maximierer** für d.
d) f ist gleichmäßig stetig.
e) Ist $f : D \to f(D)$ stetig und *bijektiv*, dann ist $f^{-1} : f(D) \to D$ stetig.

Satz 4.2.12:

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktion, x innerer Punkt von D mit $f(x) \neq 0$.
Dann $\exists \varepsilon > 0\ \forall y \in \mathcal{U}_\varepsilon(x) : f(y) \neq 0$

Definition 4.3.4: Konvergenz von Funktionenscharen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $(f_k)_k$ eine Folge von Funktionen der Form $f_k : D \to \mathbb{R}$ („Funktionenschar").

a) (f_k) heißt **punktweise konvergent** in $\xi \in D$ gegen $f(\xi)$, falls $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(\xi)$ existiert.
b) (f_k) heißt **gleichmäßig konvergent** (*uniformly convergent*) auf D gegen $f : D \to \mathbb{R}$, falls gilt:
   $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0(\cancel{x}) \in \mathbb{N}\ \forall k \ge k_0 : \forall x \in D : |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$
c) Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt: $f_k \xrightarrow{\text{gleichmäßig}} f \Leftrightarrow \|f_k - f\|_\infty \longrightarrow 0$

Satz 4.3.5: Weierstrass'sches Majorantenkriterium

Sei $f_k : D \to \mathbb{R}$ mit $(\forall k \in \mathbb{N},\ x \in D : |f_k(x)| < c_k)$ und sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k < +\infty$.

Dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ absolut konvergent und gleichmäßig konvergent auf D.

Satz 4.4.2: Konvergenz von Potenzreihen

Sei $P(z)$ eine Potenzreihe.

Formel von Cauchy-Hadamard: Sei $\lambda := \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ und $r := \begin{cases} +\infty & \text{falls } \lambda = 0 \\ 1/\lambda & \text{falls } \lambda \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{falls } \lambda = +\infty \end{cases}$

$P(z)$ ist absolut konvergent auf $\mathcal{K}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$.
$\forall r' < r:\ P(z)$ ist *gleichmäßig* konvergent auf $\mathcal{K}_{r'}(z_0)$, sodass $P(z)$ auf $\mathcal{K}_r(z_0)$ stetig ist.
r heißt **Konvergenzradius** von $P(z)$ und $\mathcal{K}_r(z_0)$ heißt **Konvergenzkreis**.
Es ist *keine* allgemeine Aussage über $\mathcal{S}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ möglich.

Bemerkung 4.4.3: Alternative Berechnung zur Cauchy-Hadamard-Formel

$\lambda = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ falls der Grenzwert existiert.

Bemerkung 4.4.6: Eigenschaften der Hyperbelfunktionen

Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig.

- $\cosh(-z) = \cosh z$ und $\sinh(-z) = -\sinh z$
  $\Rightarrow\ \cosh 0 = 1$ und $\sinh 0 = 0$
- $e^z = \cosh z + \sinh z$ und damit $e^{-z} = \cosh z - \sinh z$
  $\Rightarrow\ \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ und $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$
- $\cosh(iz) = \cos z$ und $\sinh(iz) = i \cdot \sin z$

Satz 4.4.7: Additionstheoreme

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

- $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$
- $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$
- $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$
- $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$

$\Rightarrow \cos^2 z + \sin^2 z = 1$ und $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$