Analysis I

Kompaktmerkzettel (Muster)

von Alexander Köster

Student der Universität Siegen, Wintersemester 2017/18

Letzte Aktualisierung: 24. Februar 2018

Reelle Zahlen, Folgen, Reihen, Funktionen

Einzig für Lernzwecke erstellt.

Diese Zusammenfassung eignet sich nur, wenn man die Themengebiete bereits verstanden und verinnerlicht hat.
Das Nutzen dieses Kompaktmerkzettels ersetzt keine Klausurvorbereitung.
Jeder hat eigene Schwächen. Es ist dringend empfohlen, eigene Kompaktmerkzettel fokussiert auf diese Schwächen zu bauen.
Aus meiner zugehörigen kompletten Zusammenfassung fehlende Elemente, die hier nicht auftauchen, sind niemals weniger relevant: ich konnte sie mir nur merken und sie daher von diesem Kompaktmerkzettel auslassen!

1 Reelle Zahlen

- Für Mengen A, B, C gilt:
  - ▷ $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$
  - ▷ $A \subseteq A \cup B$ und $B \subseteq A \cup B$
  - ▷ $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$
  - ▷ $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
  - ▷ $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- a) **inj.** (le.): $\forall m_1, m_2 \in M: f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$
  b) **surj.** (rt.): $\forall n \in N: \exists m \in M: f(m) = n$
- Für $f: X \to Y$ und $A_1, A_2 \subseteq X$ gilt:
  - ▷ $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$
  - ▷ $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
  - ▷ $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- **Gruppe**: Assoz., Neutr., Inv.
- **Monoid**: Assoz., Neutr.
- **Körper**: $+$ Ab. Gruppe, $\cdot$ komm. Monoid, $(K^* = K \setminus \{0\}, \cdot)$ Ab. Gruppe, Distr.-Gesetze
- $\exists \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:
  1. $\mathbb{R}$ ist ein **Körper**.
  2. $\mathbb{R}$ ist **angeordnet**, d.h. $\exists$ Rel. $\leq$, sodass:
     2.1. $\mathbb{R}$ ist **totalgeordnet**, d.h.
       2.1.1. $\mathbb{R}$ ist **teilgeordnet**, d.h.
         - ▷ $\forall x \in \mathbb{R}: x \leq x$ (*reflexiv*)
         - ▷ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (*transitiv*)
         - ▷ $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (*injektiv*)
       2.1.2. $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \vee y \leq x$ (*total*)
     2.2. Die Ordnung ist verträglich mit Addition und Multiplikation, d.h. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:
       2.2.1. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
       2.2.2. $a \leq b$, $0 \leq c \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$
  3. $\mathbb{R}$ ist **vollständig** (*complete*), d.h. jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.
- **Kompaktifizierung** $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
- **Dreiecksungl.**: $|x + y| \leq |x| + |y|$ (für $\cdot$ ist es $=$)
- **Gauß'sche Summenformel**: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- **Geometrische Summe**:
  Für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $\mathbb{R}$ ist ein **archimedisch angeordneter Körper**, d.h.: $\forall a, b \in R$ mit $a, b > 0: \exists n \in \mathbb{N}: na > b$.
  $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}^+ \ \exists n \in \mathbb{N}: \ 0 < \frac{1}{n} < a$
- **Bernoulli**: $\forall x \in [-1, +\infty[\setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2: (1+x)^n > 1 + nx$
- Für $n, k \in \mathbb{N}$, $n \leq k$ sei $\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.
- **Binomischer Lehrsatz**: Für $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
- **Dedekind'scher Schnitt**:
  1. (U, V) ist eine *Zerlegung* von $\mathbb{R}$, d.h.
     (a) $U \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset$
     (b) $U \cap V = \emptyset$
     (c) $U \cup V = \mathbb{R}$
  2. $U \leq V$, d.h. $\forall u \in U \ \forall v \in V: \ u \leq v$.

  $\exists!$ Schnittzahl $c = \sup U = \inf V$ definiert mit $U \leq c \leq V$, $\Leftrightarrow$ Vollständigkeitsaxiom
- **AGM-Ungl.**: $a_i \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

1.1 Komplexe Zahlen

- $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, \ ad + bc) \in \mathbb{C}$
- $|z| := \sqrt{\mathrm{Re}^2 z + \mathrm{Im}^2 z} = \sqrt{z\bar{z}}$
- **Euler**: Für $z \in \mathbb{C}$ ist $e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z$
- $z = |z| \, e^{i \arg(z)}$

2 Folgen und Reihen

- **kvg**: $\forall \varepsilon > 0: \exists n_0(\varepsilon): \forall n \geq n_0: |a_n - \alpha| < \varepsilon$
- **dvg**: $\forall M {}^{>}/_{<} 0: \exists n_0(M): \forall n \geq n_0: a_n {}^{\geq}/_{\leq} M$
- **Absolut kvg.**, wenn $(|a_n|)$ kvg. $\Rightarrow (a_n)$ kvg.
- **GWS** $a_n \pm b_n \longrightarrow \alpha \pm \beta$, $a_n b_n \longrightarrow \alpha\beta$, $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{\alpha}{\beta}$ wenn $\forall n: b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$
- Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $\forall n \in \mathbb{N}: b_n \neq 0$.
  a) $a_n \longrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$, $b_n \longrightarrow \pm\infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 0$
  b) $a_n \longrightarrow \pm\infty$, $b_n \longrightarrow \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$
     $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow$

$\beta \backslash \lim a_n$	$+\infty$	$-\infty$
> 0	$+\infty$	$-\infty$
< 0	$-\infty$	$+\infty$

  c) $a_n \longrightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b_n \longrightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n}$ divergent, wobei mit festen $N \in \mathbb{N}$ gilt:
     $\forall n \geq N: b_n > 0, \ \alpha > 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow +\infty$
     $\forall n \geq N: b_n < 0, \ \alpha > 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow -\infty$
     usw...
- $\frac{a+bn+\ldots}{c+dn+\ldots}$: durch gr. Pot. des Nenners kürzen
- **Monotoniekriterium** $\longrightarrow \sup/\inf$
- **Bsp.:** $x_1 := 1$, $x_{n+1} := \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}$ mit $x_n \longrightarrow \sqrt{2}$
- **Bsp.:** $\left(1 + \frac{m}{n}\right)^n \longrightarrow e^m$ für $m \in \mathbb{Z}, n > |m|$
- **Bsp.:** $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{n!}{n^n} \longrightarrow 0$ und $\sqrt[n]{n}, \sqrt[n^2]{n!} \longrightarrow 1$
- (I_n) **Intervallschachtelung**, wenn
  1. $\forall n \in \mathbb{N}: \ I_{n+1} \subseteq I_n$
  2. $|I_n| = b_n - a_n \longrightarrow 0$ (Intervallgröße)
- (a_n) kvg. $\Rightarrow \forall$ Tf. kvg.
- (a_n) monoton und hat kvg. Tf. $\Rightarrow (a_n)$ kvg.
- $\forall$ Folgen hat min. eine monotone Tf.
- **Bolzano-Weierstraß:** Jede beschränkte Folge besitzt kvg. Tf. (nicht in $\mathbb{Q}$) *oder:* Jede beschr. Folge hat min. einen echten Hw. in $\mathbb{R}$
- **Cf.**: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n, m \geq n_0: |a_n - a_m| < \varepsilon$
- Folge kvg. $\Rightarrow$ Cauchy-Folge
- Jede Cauchy-Folge ist beschränkt
- Jede Cf. ist konvergent in $\mathbb{R}$

2.2 Reihen

- Reihe abs. kvg. wenn $\sum |a_n|$ kvg $\Rightarrow \sum a_n$ kvg.
- **Cauchy Kvg.krit.**: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kvg. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \ \forall n, m \geq n_0(\varepsilon), \ m > n: \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kvg. $\Rightarrow r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \xrightarrow{n \to \infty} 0$
- Ist $\forall k: a_k \geq 0$, ist $\sum a_k$ kvg. $\Leftrightarrow \sum a_k$ beschr.
- **Bsp.:** Harm.R. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow 0$
  und **Geometr.R.** $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists$ abzählbar viele Intervalle I_n, sodass $\mathbb{Q} \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |I_n| = \varepsilon$ („$\mathbb{Q}$ **Nullmenge**").
- In kvg. R. darf man ohne Änd. des $\lim$ unendl. viele Klammern setzen, i.A. nicht weglassen.
- $\sum a_k, \sum b_k$ kvg. $\Rightarrow \sum (a_k + b_k)$ kvg. mit diesem Wert, $\sum (\lambda a_k)$ kvg. mit diesem Wert
- **kvg. Maj., div. Min.**
- **Bsp.:** $\zeta(\alpha) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$
  $\alpha < 1$: div., $\alpha \geq 2$: kvg., $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$
- **Quotientenkrit.** $k_0 \in \mathbb{N}$ und $\forall k \geq k_0: a_k > 0$.
  1. $\exists 0 < q < 1: \exists k_1 \in \mathbb{N}: \forall k \geq k_1: \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kvg.
  2. $\exists k_1 \in \mathbb{N}: \forall k \geq k_1: \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$
  3. $\limsup \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kvg.
- **Wurzelkrit.** $k_0 \in \mathbb{N}$ und $\forall k \geq k_0: a_k > 0$.
  1. $\exists 0 \leq q < 1: \exists k_1 \in \mathbb{N}: \forall k \geq k_1: \sqrt[k]{a_k} \leq q \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kvg.
  2. $\exists k_1 \in \mathbb{N}: \forall k \geq k_1: \sqrt[k]{a_k} \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$
  3. $\limsup \sqrt[k]{a_k} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kvg.
- **Dezimalbruchentwicklung**
  a) Zu jedem $a \in \,]0, 1]$ existiert eine Folge $(z_i)_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \subseteq \{0, \ldots, 9\}$, sodass $a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{10^k}$. („$a = 0, z_1 z_2 z_3 \ldots$")
  b) Allgemein: Sei $g \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, dann gilt: $\forall a \in \,]0, 1]: \exists (z_i)_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \subseteq \{0, 1, \ldots, g-1\}: a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_i}{g^k}$
  c) Sei $a \in \mathbb{R}$. $\exists n \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $(z_k) \subseteq \{0, 1, \ldots, g-1\}: a = n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{g^k}$
  d) Auf $]n, \ n+1]$ mit $n \in \mathbb{Z}$ eindeutig.
- **Leibnizkrit.** $\sum a_k$ **alt.**, und $(|a_n|)$ *mon. f. Nullf.* $\Rightarrow$ kvg. $\sum a_k$, $\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq |a_{n+1}|$.
- Wert einer *alt.* Reihe $S = \lim S_n$ am Index K bis auf einen *bekannten* Fehler $F \geq |S - S_k| \ \forall k > K \in \mathbb{N}$ zu best., zeige, dass kvg. nach Leibniz ist. Dann gilt nach L.: $|S - S_k| \leq |S_{k+1}|$. Suche also durch Lösen v. $|S_K| = F$ das K, für das das Restglied nur noch max. F ist.
- **Verdichtungssatz v. Cauchy** $\forall n \in \mathbb{N}: a_n > 0$ und $(a_n) \searrow$. Dann: $\sum a_n$ kvg. $\Leftrightarrow \sum 2^n a_{2^n}$ kvg.
- $\sum a_n$ **bedingt** konv. (kvg., nicht abs.), $S \in \mathbb{R}$ bel. $\Rightarrow \exists$ Umordn. v. $\sum a'_k \longrightarrow S$ und $\exists$ Umordn. $\sum a''_k \longrightarrow \pm\infty$
- **Cauchyprodukt**: $\sum a_n, \sum b_n$ abs. kvg. $\Rightarrow \sum c_n = (\sum a_n)(\sum b_n)$ kvg. und $c_n = \sum_{k,l=0, k+l=n}^{n} a_k b_l$ **Bsp.:** $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 + b_0, c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \ldots$
- $l^p := \{(a_n) \mid \sum |a_n|^p < +\infty\}$ mit $p \in [1, +\infty[$
- Für $p \leq q$ ist $l^p \subseteq l^q$
- **Exp.fkt.**: $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- **Funktionalgl.**: $\exp x \cdot \exp y = \exp(x + y)$
  1. $0 \mapsto 1 \mapsto e$, $\forall k \in \mathbb{N}: \ \exp(k+1) = e^{k+1}$
  2. $\forall x \in \mathbb{R}: \ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
  3. $\forall x \in \mathbb{R}: \ \exp(x) > 0$
  4. $\forall x \in \mathbb{Q}: \ \exp(x) = e^x$
  5. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sei $e^x := \exp(x)$ (Def.!).
  6. str. mon. w., bij., stetig, $e^x \xrightarrow{x \to -\infty} 0$
- $\log(xy) = \log x + \log y$, $\log x^z = z \log x$

2.3 Häufungswerte

- α **HW** $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ |\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - \alpha| < \varepsilon\}| = \infty$
- $(a_n), (b_n)$ Folgen, $\lambda \in \mathbb{R}$. Falls r.S. def.:
  1. $\overline{\lim}(\lambda a_n) = \lambda \overline{\lim}(a_n)$
  2. $\overline{\lim}(a_n) = -\overline{\lim}(-a_n)$
  3. $\overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$
  4. $\overline{\lim}(a_n + b_n) \geq \overline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n$
  5. $\overline{\lim}(a_n + b_n) = \overline{\lim}\, a_n + \lim\limits_{n \to \infty} b_n$ (kvg.)
  - ▷ $+\infty + (+\infty) = +\infty$
  - ▷ $-\infty + (-\infty) = -\infty$
  - ▷ $(+\infty) \cdot \lambda = +\infty$ wenn $\lambda > 0$
  - ▷ $(+\infty) \cdot \lambda = -\infty$ wenn $\lambda < 0$
  - ▷ $(-\infty) \cdot \lambda = -\infty$ wenn $\lambda > 0$
  - ▷ $(-\infty) \cdot \lambda = +\infty$ wenn $\lambda < 0$
  - ▷ $+\infty + \lambda = +\infty$
  - ▷ $-\infty + \lambda = -\infty$
- **Hauptsatz**: In arch. ang. $\mathbb{K}$ ist äquiv.:

1. **Supremum-Eigenschaft**: $\forall$ n.o. beschr. Teilmenge $\neq \emptyset$ von $\mathbb{K}$: hat sup
2. **Dedekind'scher Schnitt**: $\forall$ Dedekind'sche Schnitt $\exists!$ Schnittzahl.
3. **Monotoniekriterium**: $\forall$ n.o. beschr. mon. w. Folge ist kvg.
4. **Intervallschachtelungseigenschaft**: $\forall$ I.S. $\longrightarrow$ ein Punkt ξ
5. **Satz von Bolzano-Weierstraß**: $\forall$ beschr. Folge hat min. eine kvg. Tf.
6. **Vollständigkeit**: Cf. $\Rightarrow$ kvg.

3 Metrische Räume

- (M1) **pos.D.**: $\forall x,y \in E: \; d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
  (M2) **Sym.**: $\forall x,y \in E: \; d(x,y) = d(y,x)$
  (M3) **Dreiecksungleichung**: $\forall x,y,z \in E: \; d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
- $x \in M$ **innerer Pkt.** $\exists \varepsilon > 0 : \mathscr{U}_\varepsilon(x) \subseteq M \subseteq E$
- **offen** $\forall m \in M$ ist m innerer Pkt. ($M = \mathring{M}$)
- $x \in E$ **HP** $\forall \varepsilon > 0 \; \exists y \in M, y \neq x : d(x,y) < \varepsilon$ d.h. $\forall \varepsilon > 0 : (\mathscr{U}_\varepsilon(x) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$
- **abg. Hülle**: $\overline{M} = M \cup \{\text{alle HP}\}$
- **Rand**: $\partial M := \overline{M} \setminus \mathring{M}$
-][offen, [] abgeschlossen
- ▷ $\bigcup$ offen = offen
  ▷ $\bigcap < \infty$ offen = offen
  ▷ $\bigcap$ abg. = abg.
  ▷ $\bigcup < \infty$ abg. = abg.
  ▷ abg. $\Leftrightarrow$ Komplement offen
- **relativ kompakt** = $\overline{M}$ kompakt
- kompakt $\Rightarrow$ beschränkt u. abg. (für $\mathring{E} = \mathbb{R}^n$ sogar $\Leftrightarrow$ **„Bolzano-Weierstraß"**)
- vollst. E und $M \subseteq E$ abg. $\Rightarrow$ M vollst.
- ▷ $\cup < \infty$ kompakt = kompakt
  ▷ $\cap$ kompakt = kompakt
  ▷ $K \subseteq E$ kompkt., $A \subseteq K$ abg. $\Rightarrow$ A komp.
- Endl. Mengen, und $\emptyset$ immer kompakt
- E selbst und $\emptyset$ immer offen & abg.
- **Banach'scher Fixpunktsatz** (E,d) *vollst.* und $f: E \to E$ **kontrahierend**, d.h. $\exists q \in]0,1[$, sodass $\forall x,y \in E: \; d(f(x),f(y)) \leq q\, d(x,y)$.
  $\Rightarrow f \; \exists!$ **Fixpunkt**, d.h. ein $\hat{x} \in E$ mit $f(\hat{x}) = \hat{x}$, wobei $\hat{x}$ der Grenzwert der Folge$x_0 \in E$ beliebig, $x_{n+1} := f(x_n)$, und Fehlerabschätzungen:
  a) **A-priori**: $d(x_n,\hat{x}) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1,x_0)$
  b) **A-post.**: $d(x_n,\hat{x}) \leq \frac{q}{1-q} d(x_n,x_{n-1})$
- $\mathbb{K}$**-VR** wenn $\mathscr{V} \neq \emptyset$ und
  (V1) $(\mathscr{V},+)$ *Abelsche Gr.*
  (V2) $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K} \; \forall x \in \mathscr{V}: \; (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$
  (V3) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \; \forall x,y \in \mathscr{V}: \; \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
  (V4) $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K} \; \forall x \in \mathscr{V}: \; (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
  (V5) Für $1 \in \mathbb{K}$ ist $\forall x \in \mathscr{V}: \; 1x = x$
- $0_\mathbb{K} \cdot x = 0_\mathscr{V}, (-1)\cdot x = -x, (-\lambda)x = -\lambda x$
- **Norm** wenn $\mathbb{K}$-VR und $\exists \|\cdot\|$ mit
  (N1) **pos. Definit.**: $\forall x \in N: \; \|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0_\mathbb{R} \Rightarrow x = 0_N$
  (N2) **Hom.**: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \; x \in N: \; \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
  (N3) **Δ-Ugl.**: $\forall x,y \in N: \; \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- Metrik $d(x,y) := \|x-y\| \Rightarrow \exists$ Folgen etc.
- Vollst. norm. R.: **Banachraum** oder $\mathbb{B}$-R.
- **Bsp.**: $\mathbb{B}$-R.: $\mathbb{R}^n$ eukl., $\|x\|_\infty := \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ und l^p mit $a = (a_n) \in l^p$ und $\|a\|_p := \sqrt[p]{\sum_{n=0}^\infty |a_n|^p}$ und $l^\infty := \{(a_n) \mid \|a\|_\infty := \sup|a_n| < +\infty\}$

4 Funktionen

- $\lim f$ heißt $\forall$ Folgen
- **(Folgen)stetig** in $\xi :\Leftrightarrow \forall (x_n)$ mit $x_n \longrightarrow \xi$: $f(y_n) \longrightarrow f(x)$ oder $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$
- oder $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall y \in D$: $(|y-x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$
- **Lipschitzstetig**, wenn $\exists L > 0 : \forall x,y \in D$: $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$
- **glm. stetig**: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\cancel{x}) > 0 \; \forall x,y \in D$: $(|y-x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$
- Lipschitz $\Rightarrow$ glm. $\Rightarrow$ stetig
- **Bsp.**: Poly., d, $\|\cdot\|$, exp, $\sqrt[n]{x}$ $(\mathbb{R}_0^+)$, $\frac{1}{x}$, $\ln x$
- **Bsp.**: $\sqrt{x}$ *nicht* Lipschitzst. auf $\mathbb{R}_0^+$, aber auf $[a,\infty[\; \forall a > 0$, $\frac{1}{x}$ *nicht* glm. st. auf $\mathbb{R}^+$
- **Gaußklammer**: $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ stetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, rechtss. st. in $n \in \mathbb{Z}$
- $\lim_{x\to\xi}(\alpha f(x) + g(x)) = \alpha \lim_{x\to\xi} f(x) + \lim_{x\to\xi} g(x)$
- $\lim(f(x)g(x)) = (\lim f(x)) \cdot (\lim g(x))$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ falls existent
- Sei $f \xrightarrow{x\to\xi} \eta, g \xrightarrow{x\to\eta} \psi$. Dann $g \circ f \xrightarrow{x\to\xi} = \psi$
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^\pm} f\left(\frac{1}{t}\right)$ w. einer v. beiden ex.
- $\lim_{x\to\xi} |f(x)| = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\xi} \frac{1}{f(x)} = 0$
- f,g st. $\Rightarrow f \pm g, \lambda f, f \cdot g$ st., $\frac{f}{g}$ st. w. $g(\xi) \neq 0$
- **ZWS** Seien $a,b,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ an, d.h. $\forall \eta \in [f(\alpha), f(\beta)] : \exists \xi \in [\alpha,\beta]$ mit $f(\xi) = \eta$.
- f st. mon. $\Rightarrow \exists f^{-1}, f$ st. in $\xi \Rightarrow f^{-1}$ st. in $f(\xi)$
- $f: D \to \mathbb{R}$ stetig in $D \Leftrightarrow \forall$ abg. $A \subseteq \mathbb{R}$: $f^{-1}(A)$ abg. $\Leftrightarrow \forall$ offene $A \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(A)$ offen (**topologisch stetig**)
- min, max, Betrag von stetiger Fkt. ist stetig
- $f: D \to \mathbb{R}$ stetig und D kompakt.
  ▷ $f(D)$ kompakt
  ▷ f beschränkt
  ▷ f nimmt Min. und Max. auf D an
  ▷ f glm. stetig
  ▷ f stetig und bij. $\Rightarrow f^{-1}$ stetig
- $f: D \to \mathbb{R}$ stetig, x inn. Pkt. von D, $f(x) \neq 0$ $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall y \in \mathscr{U}_\varepsilon(x) : f(y) \neq 0$
- $C(D)$ alle st. Fkt., D kompakt mit $\|f\|_\infty := \max_{x\in D} |f(x)| \Rightarrow \mathbb{B}$-R.
- f beschr. $\|f\|_\infty = \sup_{x\in D} |f(x)| < +\infty$ Norm
- $f_k: D \to \mathbb{R}$ Folge von Funktionen
  ▷ **pktw. kvg.** in $\xi \in D$ gegen $f(\xi)$, falls $\lim_{k\to\infty} f_k(\xi) = f(\xi)$
  ▷ **glm. kvg.** auf D gegen $f: D \to \mathbb{R}$, falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0(\cancel{x}) \in \mathbb{N} \; \forall k \geq k_0 : \; \forall x \in D$: $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$
  ▷ D kompakt, f stetig
  $\Rightarrow f_k \xrightarrow{\text{glm.}} f \Leftrightarrow \|f_k - f\|_\infty \longrightarrow 0$
- **Weierstr. Majorantenkrit.** $f_k : D \to \mathbb{R}$ mit $(\forall k, \; x \in D : \; |f_k(x)| < c_k)$ und $\sum_{k=0}^\infty c_k < +\infty$.
  $\Rightarrow \sum_{k=0}^\infty f_k$ abs. kvg. und glm. kvg. auf D.
- **Bsp.: Fourier-R.**: $(a_k), (b_k)$, $\sum_{k=0}^\infty |a_k| < +\infty$, $\sum_{k=0}^\infty |b_k| < +\infty$, also $(a_k),(b_k) \in l^1$.
  $\sum_{k=0}^\infty (a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx))$ abs., glm. kvg.

- glm. kvg. $\Rightarrow$ stetig
- $\forall$ Polynom ungeraden deg hat min. 1 Nullst.
- **Cauchy-Hadamard:** Sei $\lambda := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ und $r := \begin{cases} +\infty & \text{falls } \lambda = 0 \\ 1/\lambda & \text{falls } \lambda \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{falls } \lambda = +\infty \end{cases}$ $P(z)$ ist abs. kvg. auf $\mathscr{K}_r(z_0)$. $\forall r' < r : \; P(z)$ ist *glm.* kvg. auf $\mathscr{K}_{r'}(z_0)$, sodass $P(z)$ auf $\mathscr{K}_r(z_0)$ stetig. *keine* Aussage über $\mathscr{S}_r(z_0)$ möglich.
- alternativ: $\lambda = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ falls existent
- $\exp z = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} z^k$, $\sqrt[k]{\frac{1}{k!}} \xrightarrow{\text{AGM}} 0 \;\Rightarrow\; r = +\infty$
- $\sin z = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
  $\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \frac{1}{k!} & k \text{ ungerade} \end{cases} \Rightarrow$
  $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = 0 \;\Rightarrow\; r = +\infty$
- $\cos z = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ mit $r = +\infty$.
- $\cosh z := \sum_{n=0}^\infty \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ mit $r = +\infty$.
- $\sinh z := \sum_{n=0}^\infty \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ mit $r = +\infty$.
- Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig.
  ▷ $\cosh(-z) = \cosh z$, $\sinh(-z) = -\sinh z$ $\Rightarrow \cosh 0 = 1, \sinh 0 = 0$
  ▷ $e^z = \cosh z + \sinh z$ $\Rightarrow e^{-z} = \cosh z - \sinh z$ $\Rightarrow \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$
  ▷ $\cosh(iz) = \cos z, \sinh(iz) = i \cdot \sin z$
- **Additionstheoreme**: Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
  ▷ $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$
  ▷ $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$
  ▷ $\cosh(z_1+z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$
  ▷ $\sinh(z_1+z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$
  $\Rightarrow \cos^2 z + \sin^2 z = 1$ und $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
- $\sin z$ kvg. (Leibniz). Für $p \in \mathbb{N}$: $\exists \theta(p) \in]0,1[: \sum_{n=p+1}^\infty a_n = \theta a_{p+1} (-1)^{p+1}$

5 Differentialrechnung

- **Ableitung**: $f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$
- **P.**: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$
- **Quot.r.**: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$
- **Kettenr.**: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.
- **Abl. d. Umkehrfkt.**: $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ str. mon. und in $x_0 \in]a,b[$ diffbar, $f'(x_0) \neq 0$. $\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
- **Bsp.**: Alle Monome und Polynome sind diffbar.